

«Come disegnare forme strane in modo da vederle dritte utilizzando uno specchio particolare»: anamorfosi e laboratorio al museo

«How to draw strange shapes so that they appear straight using a special mirror»: anamorphoses and workshop at the museum

Anita Lugli e Michela Maschietto

Laboratorio delle macchine matematiche, Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia – Italia

✉ anita.lugli@unimore.it, michela.maschietto@unimore.it

Sunto / Questo articolo presenta un laboratorio svolto al museo sulle anamorfosi catottriche a specchio cilindrico, realizzato a partire da modelli della *Collezione Macchine Matematiche* del Sistema dei Musei e Orto Botanico dell'Università di Modena e Reggio Emilia e rivolto a studenti della scuola secondaria di primo grado. Dopo aver descritto il contesto storico alla base dello sviluppo delle anamorfosi e i modelli della collezione usati, viene illustrato il quadro teorico che ha guidato la progettazione del laboratorio e vengono dettagliate le attività proposte. Le risposte date nelle schede del laboratorio e i dati raccolti tramite un questionario valutativo dell'esperienza mostrano come gli studenti siano rimasti stupiti dalle attività proposte, che hanno consentito loro di imparare in modo pratico come realizzare un'immagine anamorfica. Questo laboratorio si può configurare come un caso di educazione matematica informale in cui gli studenti apprendono la matematica in un contesto museale attraverso la collaborazione con i compagni e mediante sperimentazioni inaspettate.

Parole chiave: anamorfosi; laboratorio; macchine matematiche; museo; scuola secondaria di primo grado.

Abstract / This article presents a workshop carried out in a museum context on catoptric anamorphoses with a cylindrical mirror, designed on the basis of models from the *Collezione Macchine Matematiche* within the *Sistema dei Musei e Orto Botanico* of the University of Modena and Reggio Emilia and aimed at lower secondary school students (grades 6-8). After outlining the historical context underlying the development of anamorphoses and describing the used models of the collection, the article introduces the theoretical framework that guided the design of the workshop and details the proposed activities. The answers given in the workshop worksheets and the data collected through an evaluation questionnaire on the experience show how students were surprised by the proposed activities, which allowed them to learn in a hands-on way how to create an anamorphic image. This workshop can be regarded as a case of informal mathematics education, in which students learn mathematics in a museum context through collaboration with peers and unexpected explorations.

Keywords: anamorphoses; workshop; mathematical machines; museum; lower secondary school.

1 Introduzione

Questo articolo presenta il laboratorio *Scherzi con la luce: sorprese e bizzarrie tra fisica e matematica* sulle anamorfosi per specchi svolto con studenti¹ di scuola secondaria di primo grado² nell'ambito delle iniziative del Mese della Scienza 2025 gestito dal centro MEMO del Comune di Modena in collaborazione con il Sistema dei Musei e Orto Botanico dell'Università di Modena e Reggio Emilia (MuseOmoRE).³

Il termine *anamorfosi*, dal greco "ana" (all'insù, all'indietro, ritorno verso) e "morphe" (forma), compare per la prima volta nel trattato pubblicato da Gaspard Schott (1608-1666) intorno al 1657 (Baltrušaitis, 1978/2004). Esso si riferisce principalmente a immagini distorte quando viste frontalmente, ma che si rivelano quando codificate mediante un cambio di punto di vista o uno specchio (Figura 1). La produzione delle anamorfosi si sviluppò soprattutto a seguito degli studi sulla prospettiva artificiale, che aveva come oggetto la rappresentazione dello spazio mediante disegni su superfici piane o curve.



Figura 1. Anamorfosi cilindrica⁴ dalla mostra *Perspectiva Artificialis*.

La nascita della prospettiva artificiale nel Quattrocento è legata da una parte a una trasformazione nel modo di considerare lo spazio, dall'altra ai problemi pratici sorti durante l'attività concreta di pittori, scenografi, intarsiatori, architetti ecc. Per questi elementi, il suo sviluppo si presenta come un intreccio indissolubile di riflessioni rigorose e di pratiche empiriche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006). Nella proiezione di corpi tridimensionali sulla superficie piana si dovevano determinare le dimensioni che essi dovevano avere sul quadro in modo da apparire nelle giuste proporzioni quando lo si guardava (con un solo occhio da un punto fisso, secondo il modello di piramide visiva di Leon Battista Alberti). Numerosi trattati contenevano norme precise affinché chi osservava un quadro o una decorazione guardando "liberamente" (con entrambi gli occhi, da una posizione qualsiasi) percepisse in modo pienamente armonico le profondità spaziali e le proporzioni dei singoli oggetti (Baltrušaitis, 1978/2004). Tuttavia, all'interno dei metodi elaborati per produrre immagini in prospettiva era contenuta la possibilità di

1. Il genere maschile viene usato in questo articolo per designare persone, indipendentemente dal genere.

2. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Cantone Ticino.

3. <https://www.polomuseale.unimore.it/site/home.html>.

4. Dal catalogo della mostra: <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis/4.-anamorfosi/pa-sez-anamorfosi/articolo16051829.html>.

anamorfose, cioè è possibile ottenere figure distorte rispettando le norme, quali ad esempio il mantenimento del punto di vista durante l'esecuzione del disegno e i raggi visivi rettilinei. Nel corso del XVII secolo, si diffusero sempre più le anamorfose ottiche, ma furono anche introdotte riflessioni per deformare le immagini mediante l'utilizzo di specchi di varie forme realizzando così anamorfose catottriche. La *Collezione Macchine Matematiche*⁵ di MuseOmoRE contiene numerosi modelli (detti "macchine matematiche") costruiti per testimoniare il percorso di sviluppo della prospettiva artificiale dalle pratiche di bottega alla formalizzazione degli invarianti geometrici. Una parte di questi modelli si riferisce proprio alle anamorfose.

L'Università di Modena e Reggio Emilia possiede inoltre una serie di acquerelli anamorfici per specchio cilindrico facenti parte della strumentazione fisica storica⁶ e recentemente esposti nella mostra *Tesori modenesi ritrovati*⁷ (Beggi Miani et al., 2025). Nell'ambito dei laboratori didattici dedicati alle scuole e collegati alla mostra si è proposto un laboratorio sulle anamorfose catottriche a partire da modelli della *Collezione Macchine Matematiche*. Il laboratorio si è configurato come laboratorio al museo, in quanto è stato svolto nella sala espositiva della collezione.

Sulla base dello sviluppo delle anamorfose sopra riportato, la progettazione del laboratorio ha avuto tre obiettivi principali. Il primo obiettivo era quello di far vivere agli studenti un'esperienza positiva e di meraviglia in ambito matematico. Le ricerche in didattica della matematica mettono in evidenza quanto siano rilevanti le convinzioni e le emozioni nel processo di apprendimento (Di Martino & Zan, 2011). Il secondo obiettivo era quello di fornire loro alcuni elementi per comprendere come storicamente nascono e si sviluppano le anamorfose. Il terzo obiettivo era quello di far scoprire agli studenti alcune caratteristiche invarianti dei disegni anamorfici per specchi cilindrici facendo sperimentare quell'intreccio sopra citato tra riflessioni matematiche e pratiche empiriche, per andare oltre lo stupore e imparare in modo pratico a realizzare un'immagine anamorfica o, per dirlo con le parole di uno studente riportate nel titolo dell'articolo, per imparare «come disegnare forme strane in modo da vederle dritte utilizzando uno specchio particolare».

L'articolo si compone di due parti. Nella prima parte si riprendono le linee generali della mostra *Perspectiva Artificialis* contenente le macchine matematiche per la prospettiva (par. 2). In questa parte ci si sofferma principalmente sulla sezione della mostra dedicata alle anamorfose per descrivere i modelli utilizzati nel laboratorio (par. 3). Nella seconda parte (par. 4) si inquadra il lavoro nell'ambito della ricerca in didattica della matematica, poi si presentano la struttura del laboratorio sulle anamorfose catottriche con specchio cilindrico e le attività proposte agli studenti discutendo i dati raccolti. Questa parte termina con un commento sulle risposte date dagli studenti al questionario valutativo somministrato al termine del laboratorio ed è seguita da un bilancio dell'esperienza (par. 5).

2 La mostra *Perspectiva Artificialis*

La *Collezione Macchine Matematiche* di MuseOmoRE contiene i modelli della mostra *Perspectiva Artificialis*,⁸ costituita da alcune macchine matematiche già appartenenti al Laboratorio delle macchine matematiche e arricchita nel quadro del progetto europeo *Maths Alive* (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006). La prospettiva artificiale, chiamata così in contrapposizione alla teoria della visione (prospettiva naturale), ha origine nel Quattrocento e si sviluppa nei due secoli successivi.

5. <http://www.mmlab.unimore.it>.

6. <https://www.strumentazioneistorica.unimore.it>.

7. <https://www.strumentazioneistorica.unimore.it/tesori-modenesi-ritrovati>.

8. Catalogo della mostra *Perspectiva Artificialis*: <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis.html>.

I modelli della mostra, anche quando riproducono strumenti che hanno avuto in passato notevole importanza in numerose attività, artistiche ma non solo, sono stati realizzati per sostenere un discorso storico sulla prospettiva e sulla matematica delle proiezioni centrali. A questo scopo, nella loro costruzione sono state rispettate le caratteristiche descritte nei trattati dell'epoca di artisti e matematici, come ad esempio Leon Battista Alberti (1404-1472), Iacomo Barozzi (1507-1573), Ignazio Danti (1536-1586) e Albrecht Dürer (1471-1528). La mostra si articolava in 5 sezioni: Misurare con la vista, Prospettografi, Ombre e prospettiva, Anamorfosi, Prospettiva e trasformazioni (Maschietto, 2009). Alcune delle macchine della *Perspectiva Artificialis*, oltre a essere esposte in mostre, sono state usate in esperimenti didattici a scuola (Maschietto & Bartolini Bussi, 2005) e proposte in un percorso laboratoriale sulla prospettiva in un contesto extra-scolastico (Maschietto, 2009).

3 Anamorfosi

Come sopra precisato, una sezione della mostra era riservata alle anamorfosi.

La diffusione delle anamorfosi e l'interesse per le illusioni ottiche si accompagnavano a modifiche complesse nello spazio culturale. Esse erano legate a ragioni di ordine filosofico e religioso; ma anche di ordine pratico e scientifico per suscitare meraviglia e ammirazione attraverso effetti scenografici, e allo stesso tempo per mostrare la potenza della magia naturale; infine, di ordine estetico.

È sui modelli di questa sezione della mostra che è stato progettato e sperimentato il laboratorio presentato in questo articolo.

3.1 Le anamorfosi ottiche

Si chiamano ottiche le anamorfosi tracciate su una superficie bidimensionale e osservabili direttamente, a occhio nudo. Nella loro costruzione si seguono le medesime leggi geometriche utilizzate per una prospettiva normale, ma si trasgredisce, rovesciandole completamente, alle norme del codice prospettico, basato su criteri di naturalità, armonia e verosimiglianza (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006). Secondo Baltrušaitis (1978/2004), le prime incisioni di anamorfosi risalgono al 1531; è attribuita a Leonardo l'anamorfosi più antica, contenuta nel *Codice Atlantico*. All'inizio le procedure per realizzare correttamente i disegni erano tenute segrete; fu nel Seicento che i procedimenti geometrici furono integralmente svelati, soprattutto grazie all'opera *La perspective curieuse* pubblicata nel 1638 da Jean-François Nicéron (1613-1646): si passa dai metodi empirici, come quelli descritti nel trattato *Le due regole della prospettiva pratica* di Barozzi-Danti (1583/1682), a «una scienza fondata sulla geometria dei raggi visivi e su calcoli precisi» (Baltrušaitis, 1978/2004, p. 53). Lo stesso Baltrušaitis sostiene che «l'anamorfosi non è l'aberrazione in cui la realtà è assoggettata a una visione della mente, ma un sotterfugio ottico nel quale l'apparenza eclissa la realtà» (Baltrušaitis, 1978/2004, p. 15). Comar aggiunge che i pittori di tali disegni «conducono così la prospettiva ai margini delle scienze occulte, come una dimostrazione del dubbio cartesiano e delle vanità di questo mondo» (Comar, 1992, p. 50, traduzione delle autrici).

Le "buone regole" su cui molto insistevano i primi teorici, ma anche gli artisti più aperti a sperimentazioni, prevedevano che:

- l'osservatore fosse in posizione frontale, cioè collocato su un piano parallelo al quadro (Figura 2a), in modo che almeno uno dei raggi visuali incidesse sul quadro stesso in direzione perpendicolare; in altri termini, quasi nella stessa posizione dell'artista che aveva realizzato il quadro;
- l'altezza dell'orizzonte corrispondesse alla statura media di un osservatore.

Quando l'osservatore non colloca il proprio occhio nel punto di vista che il pittore ha tenuto durante l'esecuzione del disegno, le figure risultano deformi e quindi difficilmente riconoscibili. Infatti, nella rappresentazione anamorfica (Figura 2b):

- la posizione del punto di vista era fortemente laterale, in modo che tutti i raggi visuali colpissero l'oggetto molto obliquamente;
- l'osservatore doveva porre l'occhio al filo del quadro per riuscire a ricostruire otticamente, in conformità al verosimile, la figura rappresentata;
- si poteva anche aumentare in modo esagerato l'altezza dell'orizzonte.

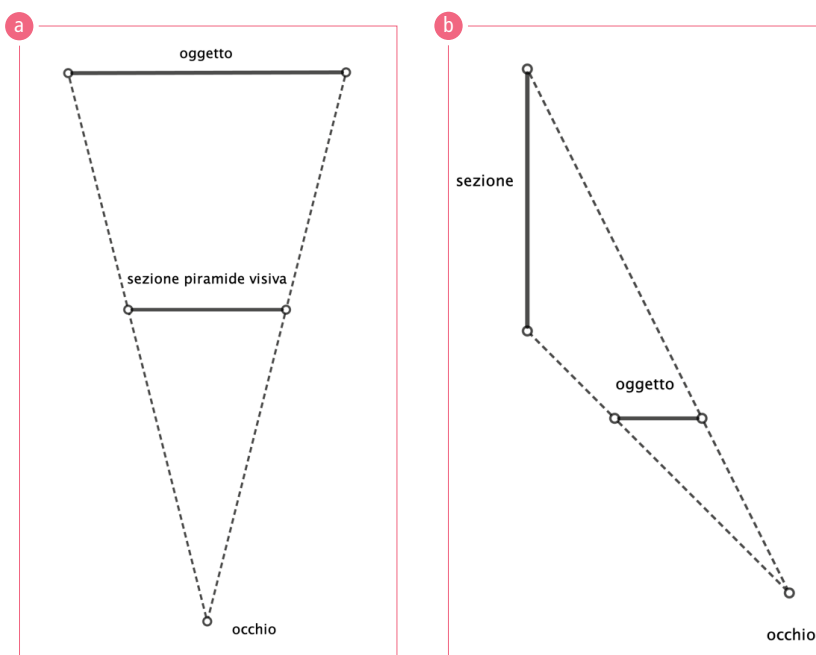


Figura 2. a) Schema per la prospettiva; b) Schema per l'anamorfofi.

Nella mostra *Perspectiva Artificialis* si trova l'anamorfofi ottica di un cubo (Figura 3): essa è stata costruita (a partire da una prospettiva "normale") non con operazioni geometriche, né con sorgenti luminose, ma usando fili tesi secondo le istruzioni fornite da Nicéron (1638/1663). Nella Figura 3 a sinistra si vede il disegno adottando un punto di vista frontale, come in generale per tutti i quadri (con lo schema in Figura 2a), mentre a destra si vede lo stesso disegno ponendo l'occhio nel punto di vista scelto dal pittore per la sua realizzazione (con lo schema in Figura 2b).

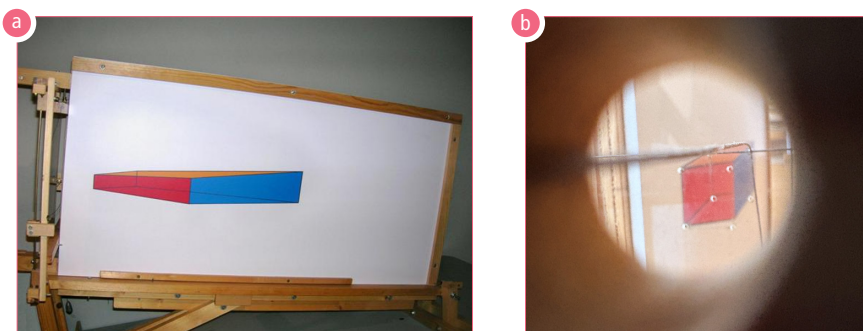


Figura 3. Anamorfofi ottica: a) Vista frontale; b) Vista laterale dall'oculare.

Anamorfofi ottiche furono realizzate su intere pareti, come nel convento di Trinità dei Monti a Roma (Niceron, 1638/1663), ma anche in quadri come in *Gli Ambasciatori* di Holbein (Baltrušaitis, 1978/2004).

3.2 Anamorfofi catottriche

Tra il 1615 e il 1625 comparve un nuovo strumento anamorfico, lo specchio, che sostituì l'immagine riflessa alla visione diretta (Baltrušaitis, 1978/2004). Furono così realizzate anamorfofi catottriche con l'uso di specchi di varie forme, ispirate anche dai dipinti cinesi diffusi all'epoca.

Nella mostra *Perspectiva Artificialis* sono presenti modelli che mettono in gioco specchi conici con punto di vista sull'asse del cono (Figura 4) e punto di vista non appartenente all'asse (Figura 5), specchio piramidale (Figura 6), specchio sferico e cilindrico (Figura 1).



Figura 4. Anamorfofi conica con punto di vista sull'asse del cono.



Figura 5. Anamorfofi conica con punto di vista non sull'asse del cono.



Figura 6. Anamorfofi con specchio piramidale con punto di vista sull'asse della piramide.

3.2.1 Anamorfofi catottriche con specchio cilindrico

Tra i vari tipi di anamorfofi, il laboratorio presentato in questo articolo mette in gioco quelle catottriche con specchio cilindrico (di cui un esempio è già stato mostrato in Figura 1).

Il primo a interessarsi a questo tipo di anamorfofi fu il matematico Jean-Louis Vaulezard che affrontò,

su richiesta dei suoi studenti, il problema di come disegnare una griglia che appaia come una griglia di quadrati quando riflessa in uno specchio, in particolare cilindrico e conico (Andersen, 1996). La soluzione fu pubblicata nel testo *Perspective cylindrique et conique* nel 1630. Vaulezard diede una costruzione precisa, ma non identificò le linee che costituiscono la griglia in quanto non erano tra quelle note all'epoca e non aveva a disposizione gli strumenti della geometria analitica per determinarne l'equazione (Andersen, 1996). Andersen sottolinea che la storia delle anamorfosi è un esempio di come problemi pratici abbiano dato origine a problemi matematici; è anche un esempio di come sia difficile colmare il divario tra tradizioni pratiche e formulazioni matematiche. Al termine della descrizione del suo metodo, Vaulezard riporta un altro metodo consistente in semirette radiali con origine nel centro del cerchio di base del cilindro e in circonferenze concentriche. Tuttavia, egli scrisse di non approvare tale metodo.

Come già detto, lo studio e la realizzazione di anamorfosi furono centrali nel lavoro di Nicéron, ispirato a sua volta da quello di Vaulezard. Ne *La perspective curieuse* (Nicéron, 1638/1663), le anamorfosi erano disegnate a partire da griglie: si proponeva la divisione del disegno originale in una griglia di caselle quadrate e la loro riproduzione in una griglia dove le caselle quadrate erano deformate in porzioni di corone circolari; lo specchio cilindrico per decodificare l'immagine doveva avere diametro uguale al lato orizzontale del disegno originale; infine, l'osservatore doveva trovare il punto di vista frontale dal quale il disegno riflesso appariva nelle proporzioni corrette (Di Lazzaro et al., 2019). Un esempio celebre è il ritratto di San Francesco da Paola presente ne *La perspective curieuse*. Tuttavia, anche se il metodo fu molto usato nelle realizzazioni anamorfiche, la costruzione che si otteneva era approssimata. Come già sostenuto da Vaulezard, Nicéron scriveva:

«Questa costruzione sembra essere fatta senza osservazione degli angoli di incidenza e di riflessione, e senza distanza e determinata altezza dell'occhio: così non pretendo che essa sia una dimostrazione perfetta [...], poiché ho voluto dare un metodo familiare e comprensibile a coloro che sono poco propensi ai principi della matematica».

(Nicéron, 1638/1663, p. 160, traduzione delle autrici)

Per quanto riguarda gli strumenti per questo tipo di anamorfosi, si ricorda quello ideato da Jacob Leupold (1674-1727) di cui una riproduzione è conservata al Museo Galileo di Firenze.⁹

3.2.2 Trasformazione realizzata da uno specchio cilindrico e proprietà

Per la progettazione del lavoro di gruppo sulle anamorfosi catottriche a specchio cilindrico (par. 4.2.2) è stata considerata la costruzione precisa della griglia curva, come appena discusso (in generale si è seguita la tradizione di Nicéron con griglia costituita da circonferenze).¹⁰ Inoltre, sono state individuate quali proprietà della trasformazione realizzata dallo specchio cilindrico possono essere scoperte svolgendo compiti pratici e utilizzate per realizzare in modo empirico una griglia curva il cui riflesso è un reticolo.

Si consideri un cilindro riflettente posto su un piano π (Figura 7), un punto di vista P_V (dove si pone l'occhio dell'osservatore) e il piano γ' passante per l'asse del cilindro e perpendicolare al segmento OV (segmento che congiunge il centro del cerchio di base del cilindro e la proiezione ortogonale di P_V sul piano π). La trasformazione realizzata dallo specchio cilindrico¹¹ è la corrispondenza tra i punti P di γ' e i punti Q di π .

9. https://redi.imss.fi.it/invenzioni/index.php/Strumento_per_anamorfosi_cilindriche.

10. Come esempio, si veda https://www.museogalileo.it/images/pdf/didattica/da_casa/fai_da_te_strumenti/anamorfosi.pdf.

11. Riportata in <https://www.macchinematematiche.org/mm/images/approfondimenti/anamorfosi%20cilindro.pdf> dove P_V e V vengono rispettivamente indicati con O e O' .

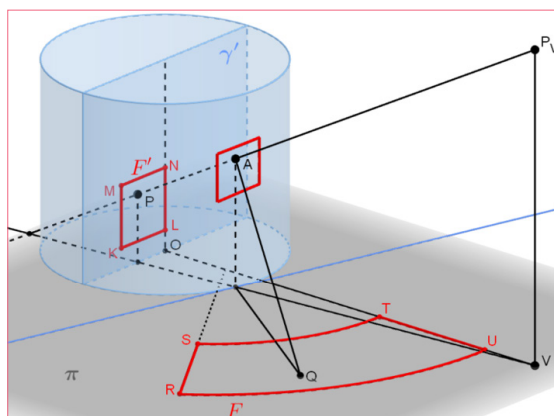


Figura 7. Trasformazione individuata dallo specchio cilindrico.

Il punto A è il riflesso del punto Q sullo specchio visto ponendo l'occhio su P_v (Figura 7): siccome i punti P , A e P_v sono allineati, l'osservatore non distingue i punti P e A . Sul piano γ' viene costruito il reticolo, mentre sul piano π la corrispondente griglia curva. È quindi possibile determinare quale figura F (immagine anamorfica) deve essere disegnata sulla griglia curva affinché l'osservatore veda sullo specchio una figura F' prefissata sul reticolo ponendo l'occhio in P_v . Le proprietà invarianti di questa trasformazione messe in gioco durante il laboratorio sono le seguenti:

1. un qualsiasi segmento appartenente al segmento OV sul piano π corrisponde a un segmento del piano γ' che appartiene all'asse del cilindro (ad esempio i segmenti TU e LN in Figura 7);
2. un segmento sul piano π che, opportunamente prolungato, forma con OV un determinato angolo acuto¹² corrisponde a un segmento sul piano γ' parallelo all'asse del cilindro (ad esempio i segmenti SR e KM in Figura 7);
3. particolari linee curve¹³ sul piano π corrispondono a segmenti sul piano γ' perpendicolari all'asse del cilindro (ad esempio la linea curva di estremi UR e il segmento NM in Figura 7);
4. segmenti sul piano π paralleli a OV e non appartenenti a OV corrispondono a linee curve sul piano γ' ;
5. segmenti sul piano π perpendicolari a OV corrispondono a linee curve sul piano γ' .

Le proprietà 1 e 2 possono anche essere riassunte come segue: a segmenti sul piano γ' paralleli o appartenenti all'asse del cilindro corrispondono segmenti sul piano π . Inoltre, tali segmenti sul piano γ' sono gli unici segmenti la cui immagine anamorfica è ancora un segmento. Infine, si può osservare che più aumenta la distanza, sul piano γ' , del segmento dall'asse del cilindro più aumenta l'ampiezza dell'angolo compreso tra l'immagine anamorfica (opportunosamente prolungata) e il segmento OV .

4 Il laboratorio sulle anamorfosi catottriche con specchio cilindrico

Il quadro di riferimento per la progettazione delle attività è il laboratorio di matematica così come delineato in *Matematica 2003* (Anichini et al., 2004), con la presenza di artefatti culturali che sono usati per costruire significati matematici. L'idea di laboratorio con le macchine matematiche è stata alla base

12. L'ampiezza dell'angolo dipende dalle caratteristiche geometriche del cilindro e dalle posizioni dei punti P_v e S . La determinazione di tale angolo non viene esplicitata in quanto non rientra tra gli obiettivi del laboratorio.

13. Individuate con l'utilizzo del software di geometria dinamica GeoGebra, la cui definizione e formula analitica non vengono esplicitate in quanto non rientrano tra gli obiettivi del laboratorio.

di sperimentazioni in classe nel quadro teorico della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), ma anche implementata in contesti extrascolastici (Maschietto & Martignone, 2008). Nello specifico delle macchine matematiche, laboratori su sezioni coniche e trasformazioni geometriche sono proposti nella sala espositiva della collezione permettendo di accostare al laboratorio vero e proprio la visita alla mostra *Macchine, meccanica e matematica* attualmente allestita (Maschietto, 2024). Accanto alla discussione generale sulle varie forme di apprendimento/educazione formale, non formale e informale, negli ultimi anni alcuni ricercatori hanno delineato un nuovo filone di ricerca riguardante l'educazione matematica informale (Nemirovsky, 2018; Nemirovsky et al., 2017). Gli ambienti dell'educazione matematica informale differiscono da quelli scolastici principalmente per i seguenti motivi: le proposte non hanno rigidi confini disciplinari in quanto le attività possono spaziare dalla matematica all'arte, alla storia, alle scienze, al gioco; le attività non sono accompagnate dalle tradizionali forme di valutazione scolastica; nella maggior parte dei casi i partecipanti sono più o meno liberi di prendere parte alle attività proposte. Tuttavia, essi sono intenzionalmente progettati per favorire l'apprendimento della matematica e coinvolgono animatori esperti e strumenti di vario tipo ad uso dei partecipanti. Nemirovsky et al. (2017) sottolineano che

«Le possibilità rilevate dalla ricerca sull'educazione matematica informale indicano un tipo di apprendimento in cui chi apprende si impegna in questioni per lui significative, amplia la percezione delle proprie capacità, raggiunge la padronanza nell'apprendere attraverso la collaborazione e intraprende sperimentazioni inaspettate. Proponiamo che rendere possibile questo tipo di apprendimento sia l'obiettivo principale dell'educazione matematica informale».

(Nemirovsky et al., 2017, p. 970, traduzione delle autrici)

In quest'ottica, le mostre e i laboratori di matematica nei musei si possono configurare come ambienti di educazione matematica informale. Questo aspetto sarà discusso in relazione al laboratorio sulle anamorfosi.

Nel seguito di questo paragrafo viene dettagliato il laboratorio sulle anamorfosi che è stato costruito a partire da modelli sulla prospettiva presenti nella *Collezione Macchine Matematiche*, descrivendo la struttura del laboratorio e le attività proposte.

4.1 Struttura del laboratorio

Il laboratorio sulle anamorfosi catottriche con specchio cilindrico è stato progettato per far scoprire a studenti della scuola secondaria di primo grado le anamorfosi come trasformazioni di figure.

Il percorso laboratoriale, della durata di un'ora e mezza, è suddiviso in tre parti: introduzione, lavoro di gruppo e conclusione.

Nella parte introduttiva (par. 4.2.1) viene mostrata una copia degli acquerelli esposti alla mostra *Tesori modenese ritrovati* (Beggi Miani et al., 2025) e viene presentato il quadro storico sulle anamorfosi attraverso l'interazione con alcune macchine matematiche: il vetro di Dürer (che verrà presentato in Figura 10), l'anamorfosi ottica del cubo (Figura 3) e l'anamorfosi catottrica con specchio cilindrico (Figura 1). Gli obiettivi specifici di questa parte sono stupire gli studenti e fornire alcuni elementi per comprendere come storicamente nascono e si sviluppano le anamorfosi.

Nella seconda parte (par. 4.2.2) gli studenti sono coinvolti in un lavoro a piccolo gruppo (due/tre componenti per gruppo) in cui viene richiesto loro di realizzare anamorfosi catottriche a specchio cilindrico, giocando su ciò che si vede nel foglio e l'immagine riflessa sullo specchio. L'obiettivo specifico è far scoprire alcuni invarianti della trasformazione che porta a un disegno anamorfico (par. 3.2.2). Per accompagnare gli studenti in questa attività viene fornita una scheda guida con le consegne da svolgere, un cilindro riflettente, un oculare e delle schede ausiliarie per svolgere le varie richieste (Figura 8), oltre a matite e pennarelli per disegnare. Per la costruzione della griglia curva si è seguito quanto riportato nei par. 3.2.1 e 3.2.2.



Figura 8. Materiale per il lavoro di gruppo.

Nella parte conclusiva (par. 4.2.3) sono mostrati altri modelli della mostra: l'anamorfose catottrica con specchio piramidale (Figura 6), le due anamorfosi catottriche con specchio conico (Figura 4 e Figura 5) e il pantografo di Parré.¹⁴ Infine, gli studenti hanno la possibilità di ricostruire le immagini degli acquerelli utilizzando specchi cilindrici di diverse dimensioni.

Al termine del percorso laboratoriale si è chiesto agli studenti di compilare un questionario valutativo dell'esperienza in forma anonima (par. 4.3).

4.2 Le attività per la classe

In questo paragrafo verranno illustrate più nel dettaglio le diverse attività proposte nel percorso didattico sulle anamorfosi, con un focus particolare sul lavoro di gruppo.

4.2.1 Momento introduttivo

Gli studenti vengono accolti mostrando loro delle strane immagini (un esempio è riportato in Figura 9), copie di alcuni degli acquerelli esposti alla mostra *Tesori modenesi ritrovati* (Beggi Miani et al., 2025). Le immagini appaiono deformate e non è chiaro cosa raffigurino, ma sono proposte proprio per incuriosire. Viene spiegato loro che questi acquerelli, così come tanti altri dipinti, sono stati realizzati da pittori con l'intento di stupire l'osservatore o nascondere messaggi segreti e che attraverso il laboratorio scopriranno come sono stati realizzati, come possono essere visti per capire cosa rappresentano e persino diventare loro stessi autori di immagini sorprendenti che suscitano meraviglia in chi le osserva.

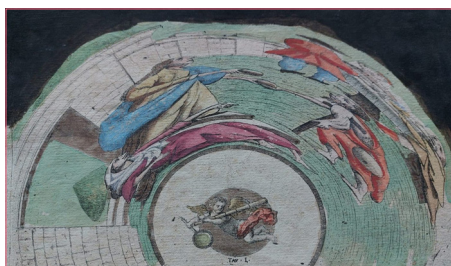


Figura 9. Tav 1⁵ dalla collezione di anamorfosi della mostra *Tesori modenesi ritrovati*.

Si inizia poi con un po' di storia sulla prospettiva rendendo il discorso interattivo grazie all'utilizzo di macchine matematiche. Dapprima viene mostrato il vetro di Dürer (la vista dall'oculare in Figura 10b)

14. <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis/4.-anamorfosi/pa-sez-anamorfosi/articolo16051832.html>.

15. <https://www.strumentazionistorica.unimore.it/collezione-di-anamorfosi-2>.

per spiegare come i pittori del Quattrocento realizzavano i loro dipinti in prospettiva, anche senza essere a conoscenza delle varie regole geometriche dietro la costruzione delle immagini prospettiche. Gli studenti guardando attraverso l'oculare osservano che l'immagine del quadro si sovrappone perfettamente all'oggetto reale e possono imitare i gesti compiuti dal pittore per realizzare il dipinto. Poi si presentano le regole seguite dal pittore: dal punto di vista parte una piramide visiva i cui raggi rettilinei attraversano il piano del quadro e toccano l'oggetto reale; l'intersezione tra questi raggi visivi con il piano del quadro genera l'immagine prospettica.

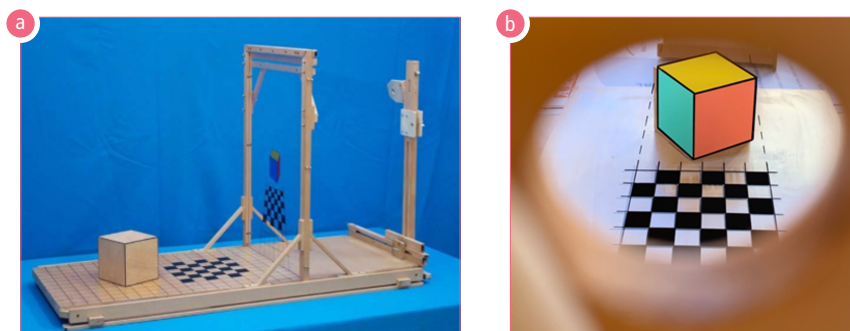


Figura 10. a) Vetro di A. Dürer¹⁶ dalla mostra *Perspectiva Artificialis*; b) Vista dall'oculare.

Si passa poi all'anamorfosi ottica del cubo, che gli studenti osservano dapprima ponendosi di fronte al quadro (Figura 3a) e solo dopo aver formulato ipotesi su ciò che secondo loro è stato raffigurato, collocano l'occhio nel punto di vista scelto dal pittore (Figura 3b) e rimangono stupiti nel vedere l'immagine. Per suscitare ancor più stupore, si passa all'anamorfosi catottrica a specchio cilindrico (Figura 1): agli studenti viene mostrata prima solo l'immagine anamorfica, poi viene opportunamente posizionato lo specchio cilindrico così da vedere nel riflesso l'immagine dell'oggetto.

4.2.2 Lavoro di gruppo

Nel momento centrale del laboratorio gli studenti sono divisi in binomi di lavoro e coinvolti in attività pratiche che li invitano a confrontare ciò che si vede sul foglio con l'immagine riflessa sullo specchio per poi arrivare a realizzare delle anamorfosi catottriche a specchio cilindrico.

All'inizio delle attività, dopo aver distribuito il materiale necessario, vengono date le indicazioni su come posizionare lo specchio cilindrico e l'oculare (Figura 11a, b): il cilindro va sempre posizionato sul cerchio di centro O e l'oculare sul punto V . Inoltre, viene specificato che il riflesso sul cilindro va sempre guardato attraverso l'oculare.

La scheda guida prevede cinque consegne. I compiti delle prime quattro consegne hanno lo scopo di aiutare gli studenti a individuare gli invarianti della trasformazione dell'immagine sul foglio nell'immagine riflessa sullo specchio cilindrico. La quinta consegna invece richiede di realizzare l'anamorfosi cilindrica di figure geometriche piane: per svolgere questo compito gli studenti devono reinvestire le conoscenze che hanno sui reticoli e combinarle opportunamente con le proprietà sulle anamorfosi scoperte fino a quel momento.

Prima consegna

Per svolgere il primo compito viene consegnato un foglio in cui è stampato, oltre al cerchio di base del cilindro e il segmento OV , un reticolo (Figura 11a); viene chiesto agli studenti di osservare il riflesso

16. Catalogo della mostra <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/perspectiva-artificialis/2.-prospettografi/pa-sez-prospettografi/articolo16051759.html>.

del reticolo sullo specchio attraverso l'oculare (Figura 11b) per poi descrivere quello che notano. Grazie a questa prima richiesta gli studenti scoprono che tutti i segmenti del reticolo vengono riflessi in linee curve, tranne il segmento *OV* il cui riflesso rimane sempre un segmento, come evidenziato da alcune risposte scritte sulla scheda:

1. «Il reticolo dal punto di vista, si vede deformato. Sembra arrotondato e diverso da come si mostra sul foglio»;
2. «Noto che la linea nera rimane dritta, invece le altre linee diventano curve»;
3. «I segmenti blu si curvano verso il basso, i segmenti rossi curvano verso il centro. Invece la retta *VO* rimane dritta e non si curva».

Gli studenti, come ben riassume la risposta 3, individuano empiricamente le prime caratteristiche geometriche della trasformazione realizzata dallo specchio cilindrico, ovvero le proprietà 1, 4 e 5 riportate nel par. 3.2.2.

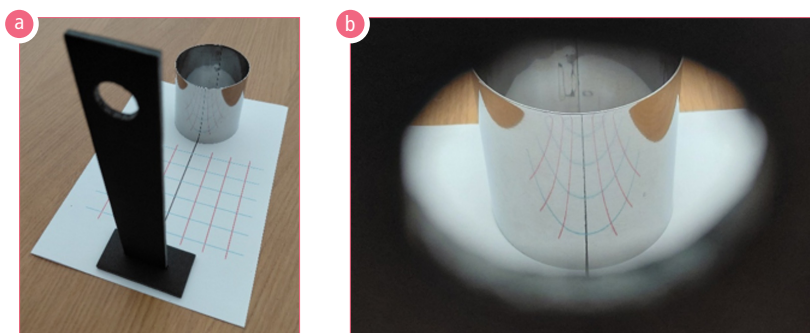


Figura 11. a) Posizionamento dello specchio cilindrico e dell'oculare; b) Vista dall'oculare.

Per affrontare le tre consegne successive viene dato un foglio su cui sono stampati dei punti rossi e gialli allineati perpendicolarmente al segmento *OV* e un punto blu sul segmento *OV* (Figura 12a).

Seconda consegna

Dapprima viene chiesto agli studenti di osservare il riflesso dei punti rossi e gialli attraverso l'oculare (Figura 12b) e di descrivere quello che notano. Con questo secondo compito gli studenti scoprono che punti allineati perpendicolarmente al segmento *OV* vengono riflessi in punti disposti su una linea curva simile ad un arco di circonferenza, come confermato dalle loro risposte:

1. «Notiamo che i punti gialli e rossi, invece che con disposizione a linea retta sono disposti a linea curva»;
2. «Notiamo che i punti gialli e rossi formano una semicirconferenza»;
3. «I punti riflessi sul cilindro sembrano formare una semicirconferenza».

In particolare, la risposta 1 evidenzia che l'allineamento dei punti sul foglio non viene conservato nel riflesso sullo specchio. Così gli studenti possono ritrovare la proprietà 5 del par. 3.2.2, già incontrata svolgendo la prima richiesta della scheda, ma questa volta ponendo l'attenzione su come cambia la disposizione dei punti passando dal disegno sul foglio (punti allineati perpendicolarmente al segmento *OV*) al riflesso sullo specchio (punti non allineati).

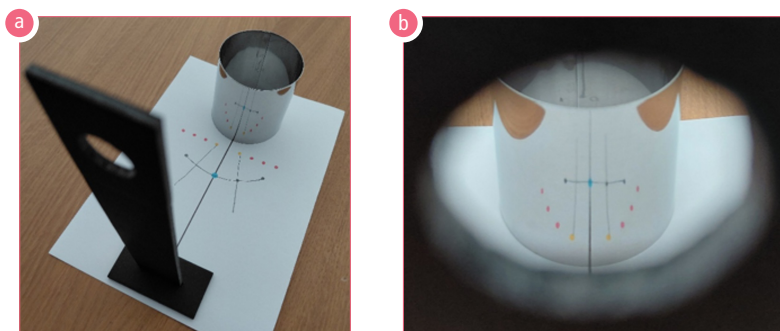


Figura 12. a) Posizionamento dello specchio cilindrico e dell'oculare; b) Vista dall'oculare.

Terza consegna

Con la terza consegna gli studenti iniziano a disegnare e viene chiesto loro, mentre guardano il cilindro attraverso l'oculare, di tracciare sul foglio, partendo dai punti gialli, dei segmenti i cui riflessi risultino verticali. Dopodiché, devono descrivere cosa osservano confrontando il disegno realizzato sul foglio con il riflesso sullo specchio. Nonostante alcuni studenti manifestino qualche difficoltà nel disegnare guardando lo specchio e non direttamente la mano (come emerge anche dalle risposte al questionario riportate nel par. 4.3), in tutti i gruppi vengono realizzati disegni (alcuni esempi sono riportati in Figura 13) che danno la possibilità di notare che per ottenere un segmento verticale sullo specchio bisogna disegnarlo sul foglio non parallelo al segmento OV (Figura 12). Ecco alcune risposte scritte degli studenti in cui emerge una regola scoperta:

1. «Notiamo che le linee appaiono verticali nel riflesso, ma nel foglio in realtà sono inclinate»;
2. «Notiamo che i segmenti tracciati nella realtà sono obliqui mentre quelli sul cilindro sono verticali»;
3. «Sul cilindro le linee sono parallele alla linea nera, invece sul foglio le linee sono oblique alla linea nera».

In particolare, come evidenzia la risposta 3, gli studenti notano che il parallelismo sullo specchio (tra il riflesso del segmento disegnato e il riflesso di OV) non si conserva sul foglio (tra il segmento disegnato e OV). Gli studenti possono quindi individuare in modo pratico, la proprietà 2 (par. 3.2.2).

Inoltre, alcuni gruppi ripetono la richiesta della consegna anche per i punti rossi ottenendo più segmenti il cui riflesso è un segmento verticale (Figura 13c). In questo caso hanno la possibilità di notare che più ci si allontana da OV più il segmento disegnato sul foglio deve essere inclinato affinché il suo riflesso nello specchio cilindrico risulti ancora verticale (par 3.2.2), come conferma la risposta scritta di un gruppo: «Le linee sul cilindro sono dritte però sul foglio vanno verso l'esterno e sempre più che si va in orizzontale vanno in obliquo».

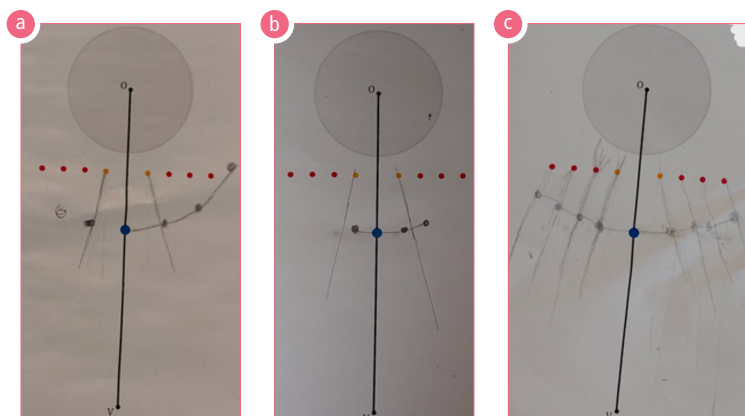


Figura 13a, b, c. Alcuni disegni realizzati per la terza e quarta consegna.

Quarta consegna

La quarta consegna è stata progettata per portare gli studenti a scoprire che per ottenere un segmento orizzontale sullo specchio cilindrico bisogna disegnare una determinata linea curva sul foglio (ossia quella presentata in Figura 12). Perciò, dapprima viene chiesto loro, mentre guardano il cilindro attraverso l'oculare, di disegnare sul foglio tre punti il cui riflesso si trovi alla stessa altezza del riflesso del punto blu; e poi, guardando direttamente sul foglio, di tracciare la curva che collega il punto blu con quelli appena tracciati. In analogia alle consegne precedenti, la quarta consegna si conclude con la richiesta di confrontare la curva disegnata sul foglio con il suo riflesso sullo specchio cilindrico e descrivere ciò che si nota. Ecco alcune loro conclusioni:

1. «Dal riflesso del cilindro riusciamo a vedere che la curva fatta sul foglio, guardando dall'oculare risulta dritta»;
2. «I punti disegnati non sono in linea perpendicolare rispetto alla linea OV mentre nel riflesso sì. E la linea curva sul foglio è dritta nel riflesso»;
3. «Notiamo che la curva che avevamo disegnato per collegare tutti i punti, nel riflesso del cilindro si è trasformata in una linea retta anche se sul foglio abbiamo disegnato una curva».

Svolgendo questo compito gli studenti possono scoprire in modo pratico la proprietà 3 (par 3.2.2), come sottolinea la risposta 2.

Grazie alle prime quattro consegne gli studenti hanno modo di scoprire alcune regole per realizzare un'anamorfo cilindrica. In particolare, combinando quanto appreso svolgendo la terza e la quarta consegna potrebbero immaginare un metodo empirico che consente di tracciare una griglia curva sul foglio il cui riflesso sullo specchio è un reticolo.

Quinta consegna

Gli studenti affrontano infine l'ultima consegna della scheda guida: realizzare l'anamorfo cilindrica di figure geometriche piane. Per svolgere questo compito viene fornito loro un reticolo con alcune figure geometriche e la rispettiva griglia curva (Figura 14a). Quando viene consegnato il materiale agli studenti, viene spiegato che la griglia curva è analoga a quella che avrebbero potuto costruire empiricamente con le regole appena scoperte. Per svolgere questo compito, gli studenti non devono guardare il cilindro attraverso l'oculare (Figura 14b), ma disegnare direttamente l'anamorfo sul foglio. Man mano che disegnano, gli studenti possono controllare guardando lo specchio dopo averlo opportunamente posizionato (Figura 14a).

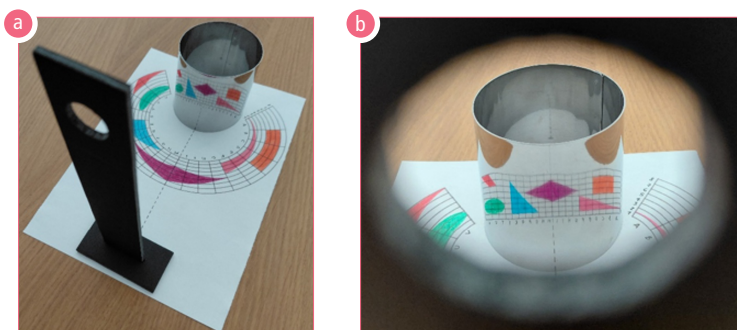


Figura 14. a) Posizionamento dello specchio cilindrico e dell'oculare; b) Vista dall'oculare.

Le figure geometriche sono state scelte in modo che il reticolo fornisca delle informazioni precise per agevolare la loro riproduzione sulla griglia curva e la realizzazione dell'immagine anamorfica, che presenta gradi di difficoltà differenti a seconda della figura proposta.

Una volta terminato il disegno sulla griglia curva, viene consegnata agli studenti la scheda di verifica relativa al loro reticolo (in cui è riportata l'immagine simmetrica del reticolo e delle figure piane) e viene chiesto loro di controllare, guardando sul cilindro attraverso l'oculare, che l'immagine riflessa corrisponda con l'immagine della scheda di verifica.

Per consentire a tutti di completare l'ultimo compito è stata proposta un'attività aggiuntiva: man mano che gli studenti terminano viene dato loro un reticolo privo di disegni e una nuova griglia curva per poter realizzare la loro anamorfosi. Per svolgere questo compito gli studenti dapprima disegnano sul reticolo un'immagine, poi ne tracciano l'immagine anamorfica sulla griglia curva. Infine, una volta terminato di disegnare, verificano con lo specchio cilindrico e l'oculare. Con questo compito aggiuntivo alcuni studenti notano che l'immagine riflessa sullo specchio cilindrico è sempre simmetrica rispetto a quella disegnata sul reticolo. In particolare, questa proprietà viene individuata dai gruppi che decidono di realizzare un'immagine anamorfica di figure non simmetriche, ad esempio disegni contenenti numeri o lettere non simmetriche (Figura 15a, b).

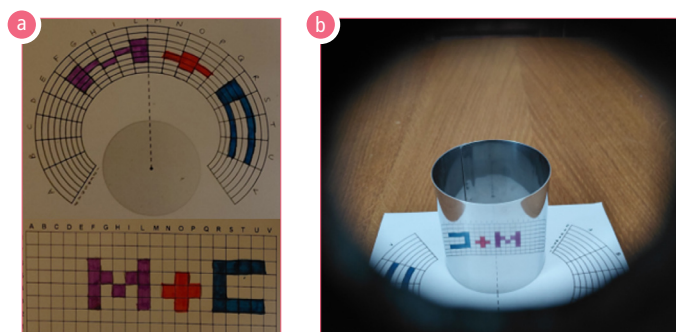


Figura 15. a) Anamorfosi inventata durante il lavoro di gruppo; b) Vista dall'oculare.

4.2.3 Momento conclusivo

Nell'ultima parte del laboratorio sono mostrate le altre anamorfosi della mostra (descritte precedentemente nelle Figure 4, 5 e 6). Come nell'introduzione al laboratorio, gli studenti prima formulano ipotesi sull'immagine che si potrebbe vedere sullo specchio e poi guardano attraverso l'oculare. Viene infine mostrato il pantografo di Parré presente nella mostra e spiegato agli studenti come utilizzarlo.

Il laboratorio si conclude svelando che gli acquerelli visti nell'introduzione al laboratorio sono immagini anamorfiche rispetto a un'anamorfosi catottrica a specchio cilindrico e fornendo specchi cilindrici di diverse dimensioni per poterli vedere. Gli studenti liberamente posizionano i vari cilindri sulle copie degli acquerelli ritrovati e cercano la giusta angolazione da dove guardare lo specchio, per poi sorprendersi quando scoprono l'immagine nascosta dietro l'anamorfosi.

4.3 Questionario di valutazione

Al termine del laboratorio, è stato chiesto agli studenti di compilare un questionario valutativo dell'esperienza, in forma anonima. L'effettivo dei questionari raccolti è 77. Il questionario era composto di 7 domande (da 1 a 7) valutate mediante scala Likert a 5 livelli (1. Molto; 2. Sì; 3. Così così; 4. No; 5. Per niente); 3 domande (8, 9 e 11) aperte e una domanda (la decima) di valutazione del laboratorio con una scala da 1 a 10. Due domande (precisamente la prima e la terza) chiedevano anche di dettagliare l'opzione scelta: in particolare, per la Domanda 1 si chiedeva di indicare cosa si riteneva di aver imparato nel laboratorio.

Le risposte alla Domanda 1 «Credi di aver imparato cose nuove durante il laboratorio?» (Figura 16) hanno dato un riscontro positivo al laboratorio. Le risposte degli studenti mostrano quanto di inaspettato ci

fosse per loro nelle attività del laboratorio. Oltre alla risposta riportata nel titolo del presente articolo, se ne presentano altre qui di seguito:

- «Facendo una forma curva non pensavo che da un'angolazione si vedesse dritta»;
- «Non sapevo che c'erano dei metodi per vedere dei disegni tramite uno specchio»;
- «C'è un mondo nuovo da scoprire»;
- «Che il riflesso si trasforma e dà vita a un'immagine»;
- «Caratteristiche della prospettiva e nuove regole della geometria»;
- «Come nasce la prospettiva».

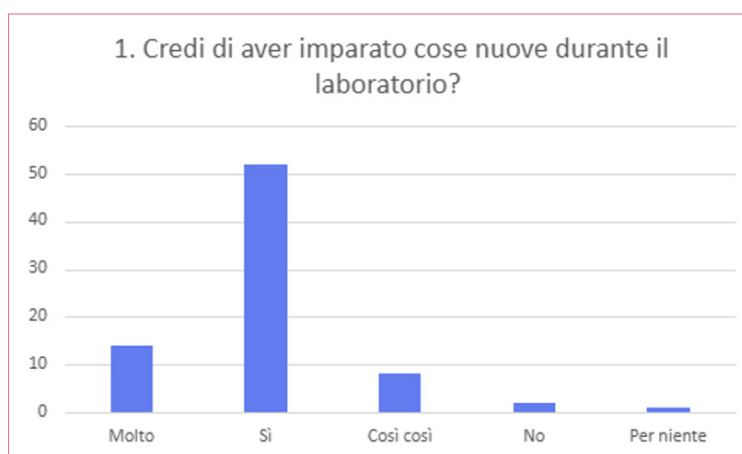


Figura 16. Distribuzione delle risposte alla Domanda 1.

Altre domande intendevano raccogliere opinioni sulla metodologia laboratoriale, sul lavoro di gruppo e sulla collaborazione tra studenti. Il laboratorio è stato ritenuto interessante dall'80% degli studenti, mentre non è proprio piaciuto solo al 5% (Figura 17).



Figura 17. Distribuzione delle risposte alla Domanda 7.

Anche il voto dato al laboratorio, in risposta alla Domanda 10, conferma il successo della proposta (Figura 18). Il voto 1 è stato assegnato da uno studente che ha dichiarato poco interesse per le cose pratiche e scarsa collaborazione nel lavoro di gruppo e da uno studente che, al contrario, avrebbe preferito lavorare da solo.

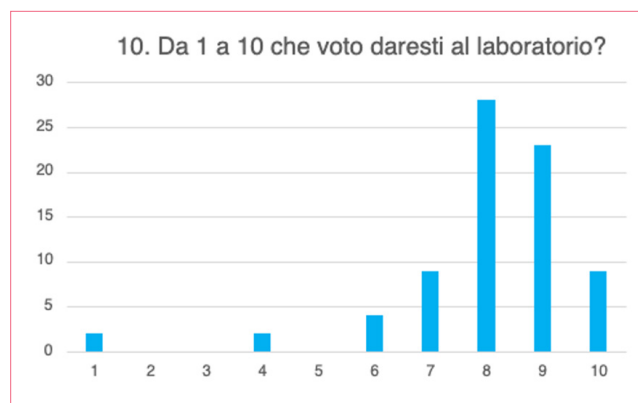


Figura 18. Distribuzione dei voti attribuiti al laboratorio, con media 8 (77 risposte).

Alla domanda su eventuali difficoltà incontrate durante le attività, 45 studenti hanno risposto di non averne avute, mentre quelle indicate riguardavano disegnare guardando lo specchio e non la mano sul foglio.

L'ultima domanda chiedeva di scrivere qualche commento sull'esperienza. Circa i tre quarti degli studenti hanno aggiunto commenti che confermano quanto il laboratorio abbia proposto esperienze nuove e inaspettate. Si riportano alcuni di questi:

- «Mi è piaciuto molto perché era interessante vedere come sono storte le figure quando le disegni per farle combaciare allo specchio»;
- «L'esperienza mi è piaciuta molto, e quando riesco a creare le illusioni mi sentivo come se fossi veramente un matematico»;
- «Bellissima la vorrei rifare: mi è piaciuto disegnare cose curve e rivelar il vero disegno»;
- «A me è piaciuta molto, un'esperienza alternativa e interessante, non mi sono mai annoiata e fatto sta che mi sono molto divertita»;
- «Mi è piaciuta molto perché oltre a spiegarci cose nuove ci hanno anche fatto provare come si disegnava in quel modo (difficile) ma bello comunque».

5 Bilancio dell'esperienza

In questo articolo è stato presentato un laboratorio sulle anamorfosi progettato per studenti di scuola secondaria di primo grado a partire da modelli presenti nella *Collezione Macchine Matematiche*. I dati raccolti durante lo svolgimento delle attività e i riscontri forniti dagli studenti mediante il questionario valutativo dell'esperienza mostrano che gli obiettivi prefissati in fase di sperimentazione sono stati complessivamente raggiunti.

Per quanto riguarda il primo obiettivo, si può affermare che gli studenti sono rimasti stupiti dalle attività svolte. I ragazzi si sono recati presso la sede della collezione sapendo di dover svolgere un laboratorio di matematica e probabilmente pensando ad attività più o meno simili a quelle proposte comunemente a scuola. Tuttavia, già dal momento introduttivo hanno potuto intuire che le attività al museo avrebbero permesso loro di incontrare la matematica in una forma diversa da quella a cui erano abituati, in quanto sono stati accolti con oggetti "inaspettati" (macchine matematiche e immagini anamorfiche). Come emerge dalle risposte al questionario, in particolare alla Domanda 11, le attività

del laboratorio sono state percepite dagli studenti come innovative, sorprendenti e divertenti. Inoltre, il contesto informale del museo e gli strumenti coinvolti sembrano aver favorito un atteggiamento aperto, curioso e disponibile alla sperimentazione durante il lavoro di gruppo: in generale, gli studenti hanno partecipato con interesse e senza timore di sbagliare, impegnandosi nonostante alcune difficoltà a portare a termine le richieste delle consegne.

Il secondo obiettivo di fornire alcuni elementi per comprendere come nascono e si sviluppano le anamorfosi è stato raggiunto: manipolando e osservando i modelli esposti, gli studenti si sono messi nei panni degli artisti imitandone i gesti compiuti per realizzare un quadro in prospettiva, nei panni dei matematici individuando alcune regolarità geometriche utilizzate dal pittore per realizzare un'immagine prospettica e infine nei panni di chi osserva le immagini anamorfiche e ne rimane meravigliato quando scopre come guardarle per capire cosa rappresentano. Come evidenziano anche alcune risposte al questionario finale, gli studenti hanno scoperto che la storia delle anamorfosi è il risultato di un'alternanza tra le pratiche empiriche elaborate dai pittori per realizzare immagini "sorprendenti" e le riflessioni teoriche dei matematici, che hanno progressivamente formalizzato le regole emerse dall'esperienza degli artisti.

Il terzo obiettivo è stato raggiunto grazie al lavoro di gruppo. Svolgendo compiti pratici appositamente progettati, gli studenti hanno scoperto invarianti delle anamorfosi (par. 3.2.2) e li hanno messi in gioco nella realizzazione delle proprie immagini anamorfiche. Gli studenti hanno così potuto sperimentare l'intreccio tra il lavoro del pittore e quello del matematico e sono andati oltre il semplice stupore suscitato dalla rivelazione dell'immagine nascosta, perché hanno imparato in modo pratico come realizzare un'immagine anamorfica.

Il laboratorio sulle anamorfosi è stato appositamente pensato per essere svolto al museo, non solo per mostrare i modelli descritti nell'articolo ma anche per sostenere il discorso storico sullo sviluppo della prospettiva. Il target della scuola secondaria di primo grado è stato determinato dall'iniziativa in cui il laboratorio è stato inserito; un suo adattamento per classi di scuola secondaria di secondo grado potrebbe permettere di approfondire maggiormente la matematica coinvolta.

In riferimento alla ricerca di Nemirovsky et al. (2017), il laboratorio sulle anamorfosi propone un argomento che non compare esplicitamente nel curriculum scolastico, ma che ha comunque suscitato l'interesse in diversi docenti (probabilmente per il fatto che spazia dalla matematica alla storia e all'arte) spingendoli a proporlo alle loro classi. Le attività sulle anamorfosi sono state progettate e condotte da animatrici esperte per favorire l'apprendimento della matematica nel contesto informale del museo, attraverso l'utilizzo di macchine matematiche e il coinvolgimento dei partecipanti in attività che non presentano la connotazione formale tipica dei percorsi legati a contenuti curricolari. È possibile quindi concludere che il laboratorio sulle anamorfosi al museo presentato in questo articolo si può configurare come un caso di educazione matematica informale, in cui gli studenti apprendono la matematica attraverso la collaborazione con i compagni e mediante sperimentazioni inaspettate.

Bibliografia

Andersen, K. (1996). The mathematical treatment of anamorphoses from Piero della Francesca to Nicéron. In J. W. Dauben, M. Folkerts, E. Knobloch & H. Wussing (Eds.), *History of Mathematics: States of the Art* (pp. 3–28). Academic Press.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. Ciclo secondario*. Matteoni Stampatore.

Baltrušaitis, J. (2004). *Anamorfosi o Thaumaturgus opticus. Edizione riveduta e ampliata*. Adelphi. (Prima edizione pubblicata nel 1978).

Barozzi, I., & Danti, E. (1682). *Le due regole della prospettiva pratica di M. Iacomo Barozzi da Vignola, con i commentari del Reuerendo Padre Maestro Egnatio Danti dell'Ordine de' Predicatori Mattematico dello Studio di Bologna*. (Prima edizione pubblicata nel 1583). <https://archive.org/details/hin-wel-all-00001766-001/mode/2up>

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: Dalla storia alla scuola*. Collana Convergenze. Springer.

Beggi Miani, L., Brunetti, R., & Morelli, S. (2025). *Tesori modenesi ritrovati*. Franco Cosimo Panini.

Comar, P. (1992). *La perspective en jeu. Les dessous de l'image*. Gallimard.

Di Lazzaro, P., Murra, D., & Vitelli, P. (2019). *Le immagini anamorfe in un viaggio interdisciplinare tra arte, storia, geometria e attualità*. ENEA.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - Mathematics Education*, 43(4), 471–482. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6>

Maschietto, M. (2009). Strumenti per la prospettiva dal Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena. In R. Sinisgalli (Ed.), *Atti del convegno "L'Arte della Matematica nella prospettiva"* (pp. 65–85). Casa Editrice Cartei & Bianchi.

Maschietto, M. (2024). Ma come hanno fatto [i matematici] a pensare a queste cose? Mostre e laboratori con le macchine matematiche. *Matematica, Cultura e Società*, 9(2-3), 253–269.

Maschietto, M., & Bartolini Bussi, M. G. (2005). Meaning construction through semiotic means: The case of the visual pyramid. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the IGPME* (Vol. 3, pp. 313–320). PME.

Maschietto, M., & Martignone, F. (2008). Activities with the mathematical machines: Pantographs and curve drawers. In E. Barbin, N. Stehlikova & C. Tzanakis (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 5th European Summer University* (pp. 285–296). Vydavateľsky Press.

Nemirovsky, R. (2018). Pedagogies of Emergent Learning. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (pp. 401–421). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_23

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Civil, M. (2017). Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics Education* (pp. 968–979). National Council of Teachers of Mathematics.

Niceron, J. F. (1663). *La perspective curieuse*. (Prima edizione pubblicata nel 1638). <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62737370/f9.item.textImage>

Vaulezard, I.-L. (1630). *Perspective cylindrique et conique*. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5818739z/>