L'equazione di Laplace: Una riflessione storico-epistemologica

Miglena Asenova[1] e Sergio Polidoro[2]
[1]*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo*
[2]*Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia*

Abstract. *The equation that at present time is known as "Laplace's equation" achieved considerable visibility thanks to the publication of the famous work of Pierre-Simon Laplace "Traité de Mécanique Céleste" (1799). Laplace is acknowledged as the developer of an analytical theory to deal with problems of astronomy understood as "celestial mechanics". In this context, the equation models the problem of gravitational attraction that a spheroid exerts on a generic material point. However, the equation was already known to Leonhard Euler, who had obtained it in 1752 in a work in which he describes the motion of an incompressible fluid. Adopting an epistemological perspective and comparing the contributions of Euler and Laplace, in this article we discuss the question of whether it is correct to associate only Laplace's name with the equation we are considering.*

Keywords: Laplace's equation, celestial mechanics, fluid mechanics, potentials, partial derivative equations.

Sunto. *L'equazione oggi detta "di Laplace" raggiunse una notevole visibilità grazie alla pubblicazione della famosa opera di Pierre-Simon Laplace "Traité de Mécanique Céleste" (1799). Laplace ebbe il merito di mettere a punto una teoria analitica per trattare problemi dell'astronomia intesa come "meccanica celeste". In quel contesto, l'equazione modellizza il problema dell'attrazione gravitazionale che uno sferoide esercita su un punto materiale generico. Tuttavia, l'equazione era già nota a Leonhard Euler, che l'aveva ottenuta nel 1752 in un lavoro nel quale descrive il moto di un fluido incomprimibile. Adottando una prospettiva epistemologica e mettendo a confronto i contributi di Euler e di Laplace, si discute di seguito la questione se sia corretto associare solamente il nome di Laplace all'equazione che stiamo considerando.*

Parole chiave: equazione di Laplace, meccanica celeste, meccanica dei fluidi, potenziali, equazioni alle derivate parziali.

Resumen. *La ecuación conocida hoy en día como "de Laplace" alcanzó una visibilidad considerable gracias a la publicación de la famosa obra de Pierre-Simon Laplace "Traité de Mécanique Céleste" (1799). Laplace tuvo el mérito de desarrollar una teoría analítica para tratar problemas de astronomía entendida como "mecánica celeste". En ese contexto, la ecuación modela el problema de la atracción gravitacional que ejerce un esferoide sobre un punto material genérico. Sin embargo, la ecuación ya era conocida por Leonhard Euler, quien la había obtenida en 1752 en una obra en la cual describe el movimiento de un fluido incompresible.*

Adoptando una perspectiva epistemológica y comparando las contribuciones de Euler y de Laplace, analizamos a continuación la pregunta de si es correcto asociar únicamente el nombre de Laplace a la ecuación que estamos considerando.

Palabras clave: ecuación de Laplace, mecánica celeste, mecánica de los fluidos, potencial, ecuaciones a las derivadas parciales.

1. Introduzione

L'equazione di Laplace

$$\Delta V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

è uno degli oggetti di studio più importanti dell'Analisi matematica, sia per le notevoli proprietà delle sue soluzioni, sia perché compare nella modellizzazione di importanti fenomeni fisici di natura diversa. Dal punto di vista storico, essa si colloca cronologicamente dopo l'equazione di d'Alembert della corda vibrante e prima dell'equazione di Fourier della propagazione del calore.[1]

L'equazione (1) compare, in coordinate sferiche, nel 1782 in un'opera di Pierre-Simon Laplace,[2] che ebbe il merito di mettere a punto una teoria analitica utile per trattare problemi dell'astronomia intesa come "meccanica celeste", basata sui fondamenti enunciati da Newton nei *Principia* (1687).[3] In quel contesto, l'equazione interviene nello studio del problema dell'attrazione gravitazionale che uno sferoide esercita su un punto materiale generico.

Sia Bottazzini sia Grattan Guinnes osservano però che l'equazione oggi detta "di Laplace" era già nota a Euler, che l'aveva ottenuta nel 1752 in un lavoro nel quale descrive il moto di un fluido incomprimibile;[4] entrambi gli storici evidenziano il fatto che Laplace doveva conoscere il lavoro di Euler sulla dinamica dei fluidi:

> Laplace (…) riuscì nella determinazione della V nel caso di uno sferoide arbitrario, assumendo che la V, per i punti interni ed esterni al corpo, verificasse l'equazione $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ che gli era certamente nota da prima per essere già nota a Euler. (Bottazzini, 1981, p. 243)
>
> His treatment of the motion of fluids was similarly Eulerian, in that he imagined

[1] Per una trattazione esauriente della questione storico-epistemologica cosiddetta della corda vibrante e dell'equazione del calore si veda Bottazzini (1981, pp. 25–38); per l'equazione del calore si vedano anche Grattan-Guinnes (1990, pp. 587–608) e Archibald (2003, pp. 8–10).
[2] Pierre-Simone Laplace (1749, Beaumont-en-Auge – 1827, Parigi).
[3] Isaac Newton (1642, Woolsthorpe-by-Colsterworth – 1727, Londra).
[4] La prima pubblicazione dell'opera di Euler che contiene questo risultato, e alla quale ci riferiamo in questo lavoro, avvenne solo nove anni più tardi, nel 1761; nel 1752 Euler fece solo un'esposizione in forma orale sull'argomento all'Accademia di Berlino. In realtà, la memoria del 1761 è la prima parte di un lavoro più ampio, a cui faranno seguito altre due parti (Euler, 1770 e Euler, 1771).

> (...) differential parallelepipeds of fluid as his means of deriving the equations of fluid flow. [La sua trattazione del moto dei fluidi era simile a quella euleriana nell'immaginare (...) parallelepipedi differenziali di fluido come mezzo per derivare le equazioni del flusso del fluido.][5] (Grattan-Guinness, 1990, p. 318)

> (...) in volume 1 of the *Mécanique céleste* (...) among the various properties the most famous is the "Laplace-equation" (known before Laplace): $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$. [(…) nel volume 1 della *Mécanique céleste* (…) tra le varie proprietà la più famosa è la "equazione di Laplace", (nota prima di Laplace): $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$.] (Grattan-Guinnes, 1990, p. 332)

Laplace non fa cenno a questo fatto ma, d'altra parte, la quasi totale mancanza di riferimenti puntuali alle fonti a cui stava attingendo è un aspetto che gli storici gli contestano da sempre. Pur trattandosi di una prassi per nulla fuori dal comune per l'epoca, sembra che Laplace sia stato particolarmente negligente in tale senso (Bacharach, 1883, p. 4; Rouse Ball, 1908, pp. 422, 426; Grattan-Guinnes, 1990, p. 317).

In questo articolo proponiamo una riflessione sull'origine dell'equazione di Laplace, adottando una prospettiva storico-epistemologica. In particolare, seguendo le indagini di alcuni dei più importanti storici della matematica, mettiamo a confronto il contributo di Euler e il contributo di Laplace, al fine di stabilire quale sia il modo corretto di riferirsi a essa.

Lo scopo del presente lavoro è quello di organizzare i risultati delle ricerche già compiute in questo campo in una riflessione unitaria, il cui punto focale sia l'equazione che viene usualmente detta di Laplace, e di trarre le eventuali conclusioni. Crediamo che esso possa essere d'interesse per chiunque abbia una discreta conoscenza dei contenuti matematici coinvolti e abbia la curiosità di conoscere le origini della famosa equazione.

2. L'equazione "di Laplace" nell'opera di Euler

Come abbiamo già osservato nell'introduzione, l'equazione in (1), che porta oggi il nome di "equazione di Laplace", era già conosciuta prima che Laplace la rendesse nota nei suoi lavori relativi all'astronomia; essa fa la sua prima comparsa nell'articolo *Principia motus fluidorum* di Leonhard Euler,[6] sulla dinamica dei fluidi, pubblicato nel 1761. Al fine di contestualizzare meglio la comparsa dell'equazione (1) nell'opera di Euler, accenniamo brevemente ai suoi lavori precedenti sulla fluidomeccanica, di cui il *Motus fluidorum* è il punto d'arrivo.

Nel *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides* (1757a), Euler sviluppa i principi generali sui quali si basa l'idrostatica. Egli afferma in particolare che un fluido è in equilibrio se la sua superficie è soggetta in ogni

---

[5] Tutte le traduzioni in italiano sono nostre.
[6] Leonhard Euler (1707, Basilea – 1783, San Pietroburgo).

punto alla stessa forza normale (Euler, 1757a, p. 226). Successivamente, Euler affronta il problema di come determinare la pressione che deve agire su ogni punto della superficie di un fluido in equilibrio, portando implicitamente in evidenza l'importanza delle condizioni al contorno per la soluzione delle equazioni differenziali. Questo argomento verrà successivamente ripreso nella seconda memoria del 1757 (1757b). Infine, Euler dimostra che la forza di gravità esercitata da un centro fisso è funzione della distanza e che le forme che si realizzano sotto l'azione della forza di gravità possono approssimare quelle dei pianeti.

Nel *Principes généraux du mouvement des fluides* (1757b), Euler prosegue il precedente lavoro e dimostra l'esistenza di una soluzione delle equazioni del moto anche in mancanza di equilibrio. In questo contesto viene assunta come ipotesi l'irrotazionalità del vettore velocità. Euler mostra in particolare che non tutti i vettori velocità ammettono potenziale, esibendo il vortice semplice che costituisce un esempio di moto che avviene in assenza di un potenziale, anche se la velocità verifica la condizione di irrotazionalità.

Nel *Principia motus fluidorum* (1761), Euler tratta i fluidi incomprimibili, sotto la condizione di continuità. Il suo intento in questo lavoro è chiaramente espresso nel paragrafo 6 dell'articolo in questione:

> In characterem igitur motuum possibilium, quicunque scilicet salua impenetrabilitate in fluido in esse possunt, inquirere hic constitui. Fluidum autem eius indolis assumo, vt neque in arctius spatium compelli se patiatur, neque eius continuitas interrumpi possit: statuo nimirum in medio fluidi durante motu nullum spatium a fluido vacuum relinqui, sed continuitatem in eo iugiter censeruari. [Ho deciso di indagare qui il carattere dei moti possibili dei fluidi, salva restando l'impenetrabilità in essi. Assumo che il fluido sia di carattere tale che non sia possibile comprimerlo in uno spazio minore e che la sua continuità non possa essere interrotta.] (Euler, 1761, §6)

Vediamo di seguito come Euler giunge all'equazione oggetto della nostra trattazione.

Nella prima parte del testo, Euler stabilisce quali sono le condizioni che devono valere affinché il moto sia possibile sotto le ipotesi iniziali di incomprimibilità e continuità. Indicando con u, v, w le componenti della velocità lungo gli assi, Euler mostra che tali condizioni sono soddisfatte solo se, in ogni istante, in ogni punto del fluido, "le tre velocità u, v, w sono funzioni delle coordinate x, y, z che verificano la seguente condizione:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0\text{" (Euler, 1761, §36).} \tag{2.1}$$

Successivamente, Euler considera l'effetto della pressione sul moto del fluido,[7] e da questo deduce che il campo vettoriale della velocità è esatto,

[7] Notiamo che già Aristotele (ca. 384 a. C. – 322 a. C.) e Archimede (ca. 287 a. C. – 212 a. C.) avevano intuito che esistesse una grandezza come quella che oggi si chiama pressione, ma

essendo

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2.2.1}$$

Di conseguenza esiste un potenziale S del campo vettoriale

$$\nabla S=(u,v,w). \tag{2.2.2}$$

Combinando le due equazioni si trova quindi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=0. \tag{2.3}$$

Euler conclude la trattazione esibendo soluzioni dell'equazione (2.3) nella forma di polinomi di grado n rispetto alle variabili x, y, z.

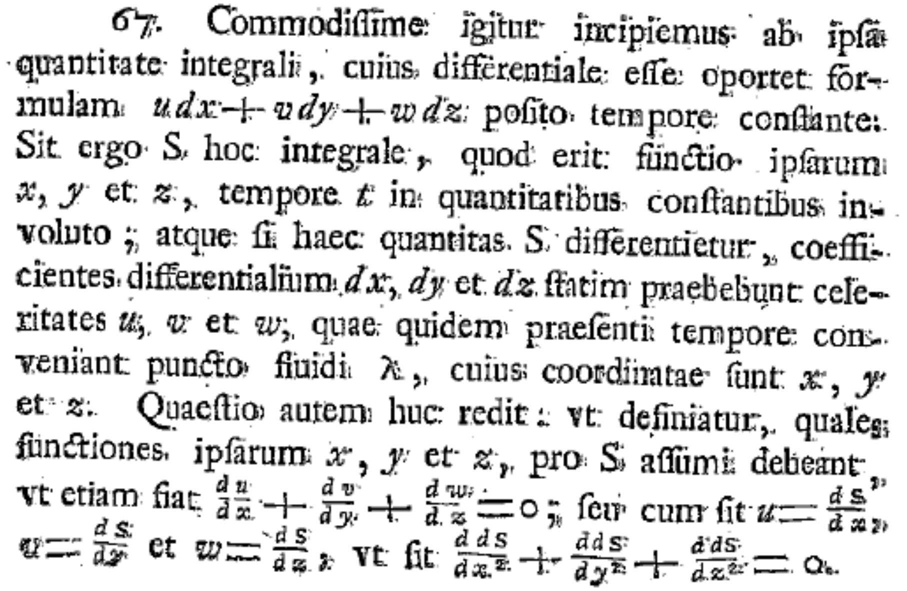
Come abbiamo notato all'inizio di questo paragrafo, nei lavori precedenti sulla dinamica dei fluidi Euler aveva mostrato che non tutti i moti sono descritti da velocità che ammettono un potenziale e aveva evidenziato la necessità di porre opportune condizioni al contorno del fluido. All'inizio del *Motus fluidorum* Euler scrive che intende trattare il caso dei fluidi incomprimibili sotto condizioni di continuità e poco più avanti afferma che

> Theoria enim ad fluida huius naturae accommodata, non adeo difficile erit, eam ad fluida quoque, quorum densitas est variabilis, et que ne continuitatem quidem necessario requirunt, extendere [Una volta che la teoria è stata adattata a fluidi di questa natura, non sarà difficile estenderla a fluidi la cui densità è variabile e che non richiedano necessariamente la continuità] (Euler, 1761, §6).

L'equazione (2.3) esprime dunque la condizione in cui il moto stazionario di un fluido incomprimibile avviene in presenza di un potenziale, sotto la condizione di continuità. Dopo aver ottenuto tale equazione, Euler la usa per determinare la pressione che agisce sulla superficie del fluido e che, come egli aveva già osservato (Euler, 1757a), deve essere uguale in ogni punto e normale alla superficie. L'equazione (2.3) è dunque un punto di arrivo dei lavori precedenti di Euler sulla meccanica dei fluidi, ma è anche il punto di partenza per la teoria più generale della fluidodinamica, in cui vengono considerati anche casi più complessi, come diventa evidente nella seconda parte del trattato sul moto dei fluidi (Euler, 1770), in cui Euler tratta lo stesso argomento per fluidi la cui densità è variabile.

---

solo nel corso del Rinascimento, soprattutto Pascal (1623 – 1662) e Torricelli (1608 – 1647) hanno capito che essa andava trattata come grandezza a parte. Uno dei grandi risultati della fisica matematica del XVIII secolo è stato invece quello di distinguere la pressione da altre nozioni come la massa o il peso, nonché la caratterizzazione del suo ruolo nella determinazione delle condizioni di equilibrio di un fluido (Grattan-Guinness, 1990, p. 662). A Euler va riconosciuto il merito di aver sviluppato pienamente il concetto di pressione e di aver precisato il suo ruolo nella dinamica dei fluidi.



67. Commodissime igitur incipiemus ab ipsa quantitate integrali, cuius differentiale esse oportet formulam $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ posito tempore constante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipsarum x, y et z, tempore t in quantitatibus constantibus involuto; atque si haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz statim praebebunt celeritates u, v et w, quae quidem praesenti tempore conveniant puncto fluidi λ, cuius coordinatae sunt x, y et z. Quaestio autem huc redit: ut definiatur, quales functiones ipsarum x, y et z, pro S assumi debeant, ut etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; seu cum sit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, ut sit $\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0$.

Figura 1. Il passo del *Principia motus fluidorum* di Euler in cui compare l'equazione (Euler, 1761, §67).

3. L'equazione (1) nell'opera di Laplace

La prima volta in cui Laplace pubblica l'equazione che successivamente prenderà il suo nome è nella memoria *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes* (1782) in cui essa appare in coordinate polari sferiche. In questo lavoro egli espone "una teoria dell'attrazione degli sferoidi e della forma dei pianeti più generale e più semplice di quelle note finora" (Laplace, 1782, pp. 341–342). Laplace scrive inoltre, riferendosi all'equazione (1) in coordinate sferiche, che nel testo in questione egli "considera le attrazioni tra sferoidi qualsiasi" e le fa "dipendere da un'equazione alle differenze parziali",[8] che è alla base delle sue ricerche sulla forma dei pianeti e che lo ha condotto ad alcuni risultati generali riguardo allo sviluppo in serie delle attrazioni degli sferoidi:

> En supposant ensuite les sphéroïdes fort approchants de la sphère et en combinant ces résultats avec une équation différentielle qui a lieu à leur surface, et dont j'ai tiré autrefois les lois de la pesanteur sur les sphéroïdes homogènes en équilibre, je

---

[8] Oggi diciamo "equazioni alle derivate parziali". All'epoca di Laplace non erano ancora state precisate né la nozione di continuità né quella di limite e il problema della distinzione tra dominio discreto e dominio continuo non era ancora considerato di centrale importanza. Si aveva forse ancora in mente un modello sostanzialmente discreto anche se tendente a qualcosa di ancora non definito, al quale si applicavano i metodi di derivazione elaborati da Leibniz e da Newton. In particolare, l'operazione inversa di quella che all'epoca era l'integrazione si chiamava differenziazione.

> parviens à une expression en séries, générale et simple, des attractions des sphéroïdes quelconques très peu différents de la sphère, expression qui se termine toutes les fois que l’équation de leur surface est finie et rationnelle. [Supponendo quindi che gli sferoidi sono molto bene approssimabili dalla sfera e congiungendo questi risultati con un’equazione differenziale che ha luogo sulla loro superficie, e dalla quale trassi già in altra occasione le leggi della gravità sulla superficie degli sferoidi omogenei in equilibrio, pervengo a un’espressione in serie, generale e semplice, delle attrazioni di sferoidi qualsiasi molto diversi dalla sfera, espressione che termina tutte le volte che l’equazione sulla loro superficie è finita e razionale.] (Laplace, 1782, p. 342)

Torneremo su questo argomento alla fine del paragrafo, quando ci occuperemo della ricerca delle soluzioni dell’equazione.

Nell’articolo *Mémoire sur la Théorie de l’Anneau de Saturn* del 1787, l’equazione (1) compare per la prima volta nella sua forma più nota, in coordinate cartesiane, e viene utilizzata per determinare la forma dell’anello di Saturno,[9] basandosi sulla teoria della gravitazione universale, “che si accorda così bene con i fenomeni e le figure dei corpi celesti” (Laplace, 1787, p. 1). Laplace suppone infatti, “come i geometri hanno fatto nelle loro ricerche sulle figure degli astri”, che l’anello di Saturno sia ricoperto di un sottile strato fluido in stato di equilibrio, il quale determina la sua forma e che impedisce che le sue particelle, soggette alla forza di gravità esercitata da Saturno, finiscano con l’unirsi alla massa del pianeta, facendo sì che, a partire dalle particelle più vicine a Saturno, l’anello scompaia gradualmente (Laplace, 1787, p. 2). Laplace conclude dunque che “C’est par les conditions de l’équilibre de ce fluide que la figure de l’anneau doit être déterminée [È attraverso le condizioni di equilibrio del fluido che la figura dell’anello deve essere determinata]” (Laplace, 1787, p. 2).

Nonostante buona parte dei risultati relativi all’uso dell’equazione (1) fossero già stati pubblicati nelle memorie appena citate, è nell’opera principale di Laplace, il *Traité de Mécanique céleste* (1799),[10] che troviamo raccolto

---

[9] Il fatto che non si trattasse di un unico, ma di più anelli, era già noto all’epoca; infatti, Huygens aveva osservato già nel 1655 che l’anello era in realtà diviso in due parti, ma Laplace afferma che in futuro telescopi più potenti potrebbero mostrare che in realtà gli anelli sono più numerosi (Laplace, 1787, p. 1); forse per questo motivo egli preferisce parlare comunque di “anello” piuttosto che di “anelli”. Ulteriori divisioni degli anelli furono scoperte nel 1837, per opera di Johann Encke (1791 – 1865) e nel 1850, per opera di George Phillips Bond (1825 – 1865); oggi si sa che gli anelli di Saturno sono molto numerosi e si usa dividerli in sette fasce.

[10] *Il Traité de Mécanique céleste* è un’opera in cinque volumi che esce a più riprese, tra il 1799 e il 1825; in questo lavoro facciamo riferimento ai primi due volumi, entrambi pubblicati nel 1799; il primo volume comprende i libri I e II, mentre il secondo volume comprende i libri III, IV e V. Il libro I tratta le leggi generali dell’equilibrio e del movimento; il libro II si occupa della legge di gravitazione universale e del movimento dei corpi; i libri III, IV e V trattano questioni relative al singolo corpo celeste, come la sua forma (libro III), le oscillazioni del mare e dell’atmosfera (libro IV) nonché il suo movimento intorno al proprio centro di gravità (libro V).

tutto il suo pensiero relativo alla matematica applicata all'astronomia ed è lì che esse acquisiscono il loro pieno significato. È stata tale opera a rendere nota l'equazione in questione a un pubblico vastissimo, che andava ben oltre i confini nazionali francesi, ed è a quell'opera che faremo riferimento nella nostra trattazione successiva.

Il proposito che Laplace persegue nel *Traité* è quello di condurre da un unico punto di vista le ricerche che, dopo Newton, hanno ricondotto alla forza di gravità tutti i fenomeni noti del "sistema del mondo", elaborando una teoria che fosse in grado di bandire una volta per tutte le equazioni empiriche dallo studio dei fenomeni astronomici:

> Je me propose de présenter sous un même point de vue, ces théories éparses dans un grand nombre d'ouvrages, et tout l'ensemble embrassant tous les résultats de la gravitation universelle, sur l'équilibre et sur les mouvements des corps solides et fluides (...). L'Astronomie, considérée de la manière la plus générale, est un grand problème de mécanique (...); sa solution dépend à-la-fois de l'exactitude des observations et de la perfection de l'analyse, et il importe extrêmement d'en bannir tout empirisme, et de la réduire à n'emprunter de l'observation, que les données indispensables. [Mi propongo di presentare sotto un unico punto di vista queste teorie apparse in un grande numero di opere e tutto l'insieme concernente i risultati della gravitazione universale sull'equilibrio e sui movimenti dei corpi solidi e fluidi (...). L'Astronomia, considerata nella maniera più generale, è un grande problema di meccanica (...); la sua soluzione dipende a volte dall'esattezza delle osservazioni e dalla perfezione dell'analisi ed è estremamente importante bandire da essa tutto l'empirismo e portarla a prendere in prestito dall'osservazione null'altro che i dati indispensabili.] (Laplace, 1799, II, p. 1)

Di seguito esaminiamo alcuni passaggi della sezione 11 del II libro del primo volume del *Traité*, nella quale viene trattato l'argomento dell'attrazione gravitazionale esercitata da uno sferoide su un punto materiale[11] e nella quale Laplace descrive il metodo che coinvolge l'equazione in questione.

Dopo aver indicato con x, y, z le coordinate di un generico punto di massa m che viene attratto dallo sferoide di massa M, Laplace denota con dM una generica molecola di tale corpo,[12] le cui coordinate sono indicate con x', y', z'. Se inoltre ρ è la densità di massa (che è una funzione di x', y', z'), allora risulta $dM = \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'$. Inoltre, la componente della forza esercitata dalla molecola di massa dM, parallela all'asse delle x e diretta verso l'origine, sarà data da

$$\frac{\rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \cdot (x-x')}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.1}$$

[11] Il secondo libro del *Traité* è dedicato alla forza di gravità universale e ai movimenti dei centri di gravità dei corpi celesti; in questo senso il punto materiale considerato è la massa di un corpo celeste, concentrata nel proprio centro di gravità.

[12] In realtà dM è la massa della molecola e non la molecola, ma Laplace identifica i due concetti, come era prassi dell'epoca.

In questo punto della trattazione, Laplace introduce la “*funzione* V” che,[13] a partire dai successivi lavori di George Green,[14] prese il nome di *funzione potenziale*:

$$V = \frac{\rho \cdot dx\prime \cdot dy\prime \cdot dz\prime}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}}. \tag{3.2}$$

Laplace riconosce che l’espressione (3.1) è la derivata parziale rispetto alla variabile x della funzione V

$$\frac{-d}{dx}\frac{\rho \cdot dx\prime \cdot dy\prime \cdot dz\prime}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}}; \tag{3.3}$$

pertanto, il potenziale della forza di gravità esercitata dal corpo di massa M sul punto di massa m viene definito come:[15]

$$V(x,y,z) = \int_M \frac{\rho \cdot dx\prime \cdot dy\prime \cdot dz\prime}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}}. \tag{3.4}$$

Laplace prosegue poi affermando che l’azione (cioè la forza di gravità) esercitata dallo sferoide sul punto di massa m, si ottiene calcolando le derivate parziali di V rispetto alle variabili x, y, z.

L’equazione differenziale oggetto del presente lavoro compare a questo punto della trattazione. Laplace infatti denota con ζ la funzione

$$((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Con questa notazione si ha

$$V = \int \zeta \cdot \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'. \tag{3.6}$$

Laplace osserva che:[16]

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right) = \int \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \cdot \left\{\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right)\right\}. \tag{3.7}$$

---

[13] L’impiego di questo tipo di funzioni non era nuovo negli studi di natura astronomica e già Lagrange ne aveva fatto uso in una sua opera del 1774 (Archibald, 2003, p. 10); torneremo su questo aspetto nel paragrafo successivo.

[14] George Green (1793, Sneinton, Nottingham – 1841, Nottingham).

[15] Come era consueto ai tempi di Laplace, il simbolo di integrale indica che si intende eseguire un’operazione di somma su un numero non precisato, ma molto elevato, di addendi. Infatti, anche se la parola “integrale” come sinonimo di somma di infiniti “indivisibili” è attribuibile a Thomas Bradwardine (ca. 1290 – 1349) (D’Amore & Sbaragli, 2018), la nozione di integrale venne formalizzata correttamente, come è noto, solo nel secolo successivo. La correttezza dei calcoli che portano alle formule introdotte da Laplace, e che coinvolgono l’integrale di una funzione illimitata, è stata convalidata dai successivi lavori di Poisson (1813) e di Green (1828), in cui verrà mostrato che l’equazione (1) è un caso particolare dell’equazione di Poisson, anche se la dimostrazione considerata pienamente soddisfacente dal punto di vista matematico sarà fornita solo da Gauss (1840).

[16] In questo passaggio lo scambio tra il simbolo di derivata e il simbolo di integrale si giustifica tenendo presente che il simbolo di integrale che usa Laplace denota una somma “finita” (anche se di un numero elevato) di addendi. La teoria dell’integrazione fu sviluppata in tempi successivi e assicura che tale scambio è consentito se il punto (x, y, z) è esterno al corpo M.

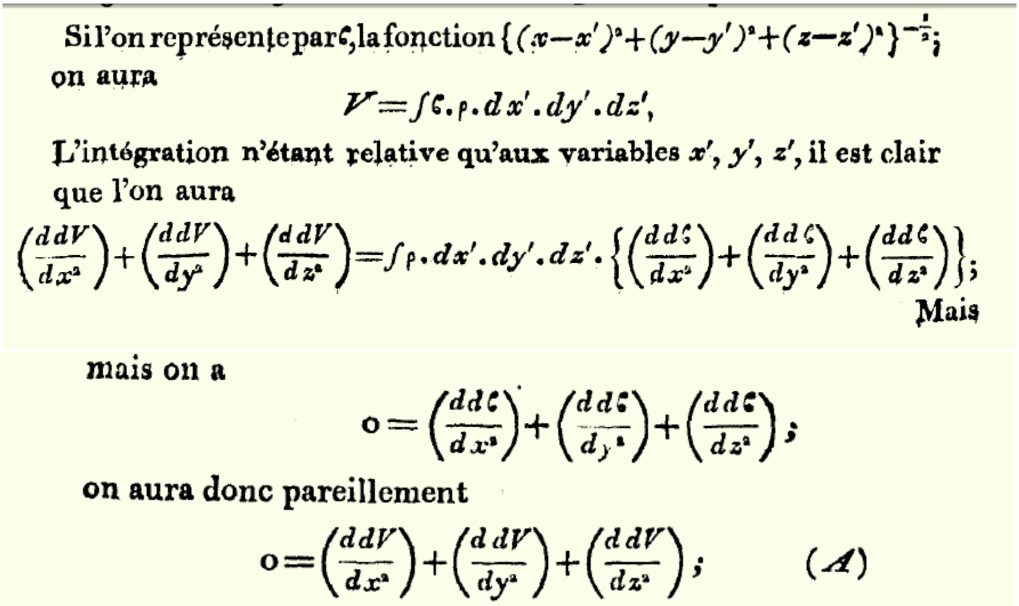
Ma essendo

$$0=\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right), \tag{3.8}$$

si avrà anche

$$0=\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right), \tag{3.9}$$

che è appunto l'equazione di Laplace in tre dimensioni e questo completa, nell'intenzione dell'Autore, la dimostrazione del fatto che una funzione potenziale è soluzione di tale equazione.


Si l'on représente par ζ, la fonction $\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$; on aura

$$V=\int\zeta.\rho.dx'.dy'.dz',$$

L'intégration n'étant relative qu'aux variables x', y', z', il est clair que l'on aura

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right)=\int\rho.dx'.dy'.dz'.\left\{\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right)\right\};$$

Mais

mais on a

$$0=\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right);$$

on aura donc pareillement

$$0=\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right); \qquad (A)$$

Figura 2. Il passo del *Traité de Mécanique céleste* in cui viene formalizzata l'equazione di Laplace (1799, II, pp. 136–137).

Nel passo illustrato in Figura 2 possiamo notare che Laplace introduce la derivazione sotto il segno di integrale in presenza della singolarità della funzione potenziale (si veda la 3.7), ricorrendo a una frase elusiva: "Essendo l'integrazione relativa solo alle variabili x', y', z', è chiaro che si avrà …" (Figura 2).

Notiamo che questa affermazione si giustifica se si interpreta l'integrale come la somma di potenziali di innumerevoli molecole e si suppone che il punto di coordinate (x, y, z) non coincida con nessuno dei centri delle molecole. Si tratta del punto della trattazione in cui, se Laplace non fosse stato interessato alla modellizzazione di quel preciso fenomeno fisico,[17] ma

[17] Come nota Gabriele Lolli, nel XVIII secolo l'attività matematica consisteva primariamente

all'elaborazione di una teoria generale della soluzione dell'equazione in (1), avrebbe potuto, anzi dovuto, fare una distinzione di casi (punto materiale interno, esterno o sulla superficie dello sferoide), rendendosi conto che l'equazione in questione è soddisfatta solo nel secondo caso. Ma il fenomeno che sta descrivendo Laplace, e che lo porta all'equazione in questione, riguarda l'attrazione gravitazionale dei corpi celesti in un sistema planetario e le ipotesi del punto materiale interno o sulla superficie non hanno alcun senso in quel contesto. Esse assumono un senso solo nel momento in cui, più avanti nella trattazione, egli usa l'equazione per altri scopi, cioè per determinare la forma della Terra (Laplace, 1799, III, pp. 25–26). In questo nuovo contesto egli assume erroneamente che il potenziale gravitazionale all'interno di uno sferoide verifichi la stessa equazione che soddisfa nel vuoto. La convinzione che l'equazione ottenuta in precedenza, nell'ambito del movimento dei centri di gravità dei corpi celesti, debba valere anche nell'ambito dell'interazione delle molecole all'interno del singolo corpo, sembra prevalere quindi in Laplace sulla necessità di una considerazione generale, di natura puramente matematica, del problema in questione.

L'equivoco che nasce qui verrà superato solo nel momento in cui si inizierà a considerare *esplicitamente* il problema di stabilire se l'equazione di Laplace può descrivere il potenziale gravitazionale in una regione di spazio non vuota.

Si tratta di uno degli errori più noti nella storia della Matematica, ma la sua importanza risiede forse, al contrario di quanto si possa ritenere a un primo impatto, nel porre un problema nuovo, piuttosto che nel non aver trovato una soluzione generale al problema matematico sottostante. Torneremo su questo fatto nel paragrafo 4.

In conclusione a questo paragrafo, vogliamo fare un cenno alla ricerca delle soluzioni dell'equazione (1) da parte di Laplace. Sia nella memoria del 1782 sull'attrazione degli sferoidi, sia nel III libro del *Traité*, Laplace scrive l'equazione (1) in coordinate sferiche, che riconduce all'equazione che oggi porta il nome di Legendre, che già all'epoca veniva studiata con metodi basati sull'uso di serie di potenze. Laplace afferma che la soluzione di questo problema ha un'espressione in serie "semplice e generale" che si esprime come somma finita ogni volta che l'equazione della superficie è "finita e razionale". La conclusione a cui arriva Laplace è che l'unico modo affinché un corpo celeste possa trovarsi in equilibrio, qualsiasi siano "le forze che lo animano", è che la sua forma sia data da un ellissoide di rotazione (Laplace, 1782, p. 342; 1799, II, pp. 138–139). Laplace è tuttavia consapevole del fatto che l'impiego dello sviluppo in serie nella sua dimostrazione comporta l'uso di

---

in una modellizzazione e risoluzione di problemi di fisica matematica. Anche se non mancano risultati isolati di natura più prettamente matematica, quella che oggi chiamiamo "matematica pura" nascerà solo nel secolo successivo, quando si inizierà a manifestare l'esigenza di liberare le dimostrazioni dalle loro "ragioni fisiche" (Lolli, 1985, pp. 26–27).

una tecnica che lui stesso considera “poco sicura” (ibid.). Questo dipende dal fatto che all’epoca il problema della convergenza delle serie impiegate dai matematici nei loro lavori non aveva ancora ottenuto una sistemazione soddisfacente; tale sistemazione si raggiunse solamente nel secolo successivo. Dunque, per dare forza alla propria soluzione e non lasciarla basare solo sul metodo dello sviluppo in serie, Laplace ricorre a una dimostrazione “a priori”:

> (...) ce résultat, fondé sur le développement en série des attractions des sphéroïdes, pouvant laisser quelques doutes, je le démontre, *a priori*, indépendamment des suite. [(…) questo risultato, fondato sullo sviluppo in serie delle attrazioni degli sferoidi, potendo lasciare alcuni dubbi, io lo dimostro *a priori*, indipendentemente da quest’ultime.] (Laplace, 1782, p. 342)

Notiamo infine, che la trattazione di Laplace del problema della forma dei pianeti ha un’impostazione molto simile a quella che segue Euler nella costruzione della sua dinamica dei fluidi. Laplace ha l’intenzione di elaborare una teoria generale relativa a sferoidi “qualsiasi”, cioè sia omogenei sia di densità variabile, e per fare ciò affronta prima il caso dello sferoide con densità omogenea [e qui troviamo l’equazione (1) che esprime lo stato di equilibrio del fluido sulla sua superficie] e poi procede con il caso più complesso della densità variabile, come aveva fatto anche Euler nel caso della dinamica dei fluidi.

4. Considerazioni sull’attribuzione della paternità dell’equazione di Laplace

Come già osservato nell’introduzione, le opere di Euler erano certamente note alla comunità dei matematici e dunque anche a Laplace e quindi egli deve essere stato a conoscenza dell’equazione a cui era pervenuto Euler nella trattazione dei fluidi incomprimibili. Il *Traité* di Laplace uscì già in occasione della sua prima pubblicazione con una tiratura molto elevata ed ebbe un’ampia diffusione anche fuori dei confini francesi. Perciò è indubbio che esso abbia contribuito alla diffusione di molte tecniche e molti concetti, tra i quali anche l’equazione oggetto della nostra trattazione. Dato che Laplace non citava quasi mai le fonti primarie e questo rendeva difficile, se non impossibile, stabilire a quali lavori propri o di altri egli avesse attinto per la stesura del testo, è naturale chiedersi se e in quale misura sia lecito associare solo il suo nome all’equazione oggetto di questo articolo o se essa non dovrebbe addirittura portare solo il nome di Euler, dato che compare per la prima volta nel suo lavoro.

Come abbiamo potuto vedere nel paragrafo 3, Laplace ottiene l’equazione a partire dalle derivate parziali della funzione potenziale V in (3.4) per derivazione dalla funzione integranda.

Notiamo che l’impiego di una funzione potenziale si può osservare in lavori precedenti di altri matematici.

Grattan-Guinness (1990, p. 332) evidenzia che anche Lagrange aveva fatto implicitamente uso di potenziali di velocità nel 1762; inoltre, come già menzionato, nella sua memoria *Sur l'équation séculaire de la Lune* del 1774, Lagrange aveva usato una funzione potenziale denominata "V" in astronomia, per il calcolo delle componenti della forza di attrazione gravitazionale, e nel 1777 aveva dedicato un breve scritto ad alcune caratteristiche delle funzioni potenziale, includendovi anche un problema del moto di un sistema di corpi, risolto attraverso l'analisi del moto del centro di massa (Archibald, 2003, p. 10).

D'altra parte, l'utilità delle funzioni potenziale era stata già mostrata da Daniel Bernoulli[18] nella sua opera *Hydrodynamica* (1738); Bernoulli aveva suggerito un metodo per la determinazione delle componenti della forza gravitazionale tramite la derivazione di una funzione potenziale e tale metodo, a cui fanno implicitamente riferimento sia Euler (1761, §67) sia Laplace (1799, II, pp. 136–137), era considerato più vantaggioso rispetto al calcolo diretto delle componenti della forza, in quanto quest'ultimo comportava la valutazione di integrali di volume per la quale era necessario conoscere sia la forma della Terra sia la sua densità (Bottazzini, 1981, p. 243).

Nonostante abbiano in comune questi punti, relativi alle funzioni potenziale, gli approcci di Euler e Laplace sono sostanzialmente diversi.

Il procedimento seguito da Euler parte dalla modellizzazione di un fenomeno reale nello studio dei fluidi e si basa su due punti fondamentali:

- il vettore velocità risulta essere il gradiente di una funzione potenziale S;
- per il principio di conservazione della massa, la divergenza di questo campo vettoriale è nulla.

Dalle precedenti due affermazioni segue immediatamente il fatto che

$$div(\nabla S) = \Delta S = 0, \tag{4.1}$$

che è il punto di arrivo del ragionamento di Euler. È importante sottolineare il fatto che Euler non sviluppa una metodologia generale per la costruzione di soluzioni dell'equazione

$$\Delta S = 0, \tag{4.2}$$

ma si limita ad esibire alcuni esempi polinomiali di questo tipo.

L'approccio di Laplace è invece di natura diversa: egli intende dimostrare che la funzione del potenziale gravitazionale soddisfa l'equazione che lui ha già in mente e che chiama "equazione notevole" (Laplace, 1799, II, p. 137). Anche Laplace parte dalla modellizzazione di un fenomeno fisico ma, a differenza di Euler, egli cerca dei potenziali gravitazionali che prevede debbano soddisfare l'equazione (1). Infatti, egli osserva sostanzialmente che il potenziale gravitazionale

[18] Daniel Bernoulli (1700, Groninga, Paesi Bassi – 1782, Basilea).

$$V(x,y,z) = \int_M \frac{g m_1 m_2}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}} dx'dy'dz' \quad (4.3)$$

verifica l'equazione

$$\Delta V(x,y,z) = \int_M \Delta \frac{g m_1 m_2}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}} dx'dy'dz' \; per \; ogni \; (x,y,z) \notin M, \quad (4.4)$$

giungendo alla conclusione che il potenziale gravitazionale costruito inizialmente deve soddisfare l'equazione (1). Quella di Laplace sembra quindi, almeno nell'intento, una dimostrazione del fatto che il potenziale gravitazionale soddisfa necessariamente quella equazione notevole.[19]

Dopo aver caratterizzato i due approcci e averli messi a confronto, vediamo quali sono state le ricadute più immediate dei rispettivi lavori di Euler e Laplace che hanno visto coinvolta l'equazione oggetto della trattazione.

Successivamente al lavoro sul moto dei fluidi di Euler, il suo metodo, che porta a cercare una funzione S che verifica la condizione $div(\nabla S) = \Delta S = 0$, è stato applicato allo studio di innumerevoli fenomeni fisici, compreso il modello di Fourier della propagazione del calore. Si tratta di una generalizzazione del metodo, nella quale non è una particolare equazione a essere centrale, ma appunto il procedimento mediante il quale si modellizzano fenomeni fisici tramite argomentazioni che conducono ad equazioni specifiche.

Un altro aspetto che va chiarito quando si cerca di delineare la ricaduta del lavoro di Euler sullo sviluppo successivo della matematica relativa all'equazione oggetto della nostra trattazione, è quello che riguarda il calcolo delle variazioni; esso potrebbe infatti sembrare una conseguenza del lavoro di Euler sulla dinamica dei fluidi. Osserviamo infatti che l'equazione di Euler-Lagrange che si incontra quando si vuole cercare il minimo del funzionale

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u(x,y,z)^2) dxdydz \quad (4.5)$$

è $\Delta u = 0$.

Come affermano Cannell e Lord (1993), questo problema, che prenderà successivamente il nome di "principio di Dirichlet", fu formulato per la prima volta da Green, nel suo *Essay* del 1828. Si tratta di un problema molto importante nell'evoluzione epistemologica della Matematica (Bottazzini,

[19] Il concetto di dimostrazione non è applicabile, a nostro avviso, al procedimento seguito da Laplace per due motivi, uno di natura metodologica, l'altro di natura concettuale. In primo luogo, Laplace non disponeva degli strumenti teorici e metodologici adeguati a formalizzare una dimostrazione secondo i canoni dell'Analisi matematica moderna, ma soprattutto l'inferenza che egli compie non è di natura deduttiva, dal punto di vista logico, in quanto in essa ci sono premesse matematiche non esplicitate, come per esempio relative al dominio della funzione, concetto quest'ultimo, che sarà definito solo successivamente, nel corso del XIX secolo.

1981, pp. 242–249; Lolli, 1985, pp. 24–41), tuttavia non ci sembra possibile affermare che la sua formulazione abbia legami diretti con il lavoro di Euler sul moto dei fluidi.

Vediamo ora quali sono le ricadute più immediate del lavoro di Laplace. Nel lavoro che coinvolge l'equazione in questione, Laplace inizia la ricerca delle funzioni armoniche.[20] La ricaduta della teoria matematica che si sviluppò a partire da questo, la teoria del potenziale, ebbe ripercussioni importantissime nel campo delle applicazioni, a partire dai lavori successivi sull'elettricità, in quanto il potenziale elettrico ha la stessa forma del potenziale gravitazionale. Infatti, è proprio da questo punto che prenderà avvio il lavoro di George Green, come egli espressamente afferma, che lo condurrà, attraverso l'analisi matematica dell'elettricità e del magnetismo (Green, 1828, p. vii), a sviluppare, indipendentemente da Gauss,[21] la teoria del potenziale.

Una conseguenza importante del lavoro di Laplace è la ricaduta che esso ha avuto sulla progettazione e sulla costruzione degli apparati elettrici. Infatti, la proprietà di essere inversamente proporzionali al quadrato della distanza, che la forza elettrica e la forza gravitazionale hanno in comune, ha permesso l'applicazione della teoria sviluppata da Laplace per lo studio del moto dei corpi celesti allo studio dei corpi elettricamente carichi. Questo fatto ha permesso di progettare e realizzare dispositivi elettrici e ha avuto la conseguenza di un rapidissimo sviluppo della tecnologia relativa. D'altra parte, la teoria del potenziale ha ricevuto un forte impulso da questo tipo di applicazioni.

Da quanto esposto ci sembra di poter affermare che l'uso che fa Laplace dell'equazione in questione sia di natura molto diversa rispetto a quello che ne fa Euler e che Laplace sia stato il primo ad aver intuito ciò che fu successivamente dimostrato esplicitamente da Gauss, cioè che questa equazione gioca un ruolo centrale nella modellizzazione dei fenomeni in cui sono coinvolte forze attrattive e repulsive che agiscono in rapporto inversamente proporzionale al quadrato della distanza.[22] Laplace applica infatti l'equazione in un campo diverso da quello in cui essa è comparsa per la prima volta, fatto che può essere considerato la prima generalizzazione della

[20] Una funzione armonica è una funzione V differenziabile fino al secondo ordine che verifica l'equazione $\Delta V = 0$.

[21] Carl Friedrich Gauss (1777, Braunschweig – 1855, Gottinga).

[22] Ricordiamo che l'opera di Gauss del 1840, in cui egli riassume le sue ricerche sulla teoria del potenziale, ha proprio il titolo *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte",* cioè *"Leggi generali in riferimento alle forze attrattive e repulsive che agiscono in rapporto inversamente proporzionale al quadrato della distanza"*. Si tratta dunque di un'impostazione che generalizza la questione a tutte le forze di questo tipo poiché, come afferma Gauss, in Natura sono molti i fenomeni che possono essere spiegati assumendo l'azione di una forza agente in rapporto inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come per esempio la gravità, il magnetismo o l'elettricità (Gauss, 1840, p. 1).

sua validità in ambiti diversi, modellizzabili con la stessa legge matematica. Con questo egli pone, a nostro avviso, le basi per la teoria del potenziale.

5. La "svista" di Laplace

Abbiamo già accennato nel paragrafo 3 a ciò a cui gli storici si riferiscono con il termine di "opinione", contrastata da quanto poi mostrato da Poisson (Bottazzini, 1981, p. 244) o *oversight*, cioè "svista" (Gratain-Guinnes, 1990, p. 332), a cui pare sia stato soggetto Laplace, nel momento in cui stava considerando le funzioni armoniche non solo per punti materiali esterni allo sferoide, ma anche per punti collocati al suo interno, supponendo che anche in questo caso dovesse valere la condizione $\Delta V = 0$ (Laplace, 1799, III, pp. 25–26). Tuttavia, non possiamo esimerci a questo punto dal fare un cenno alla successiva correzione di tale errore, soprattutto perché a un esame superficiale questo problema potrebbe sminuire l'importanza del contributo di Laplace nello sviluppo della successiva teoria del potenziale. Come già accennato in precedenza, è invece proprio questo errore, a nostro avviso, a suggerire l'idea di una soluzione generale del problema, valida per punti collocati all'interno, all'esterno o sulla superficie stessa del corpo. Sarà Poisson,[23] allievo di Laplace, a correggere l'errore del maestro, mentre quest'ultimo era ancora in vita. Alcuni storici (Rouse Ball, 1908, p. 427; Archibald, 2003, p. 11) sostengono che Laplace, essendo molto generoso nei confronti dei propri allievi, nonostante fosse consapevole del problema, avesse lasciato a Poisson l'opportunità di correggerlo, cosa che in effetti Poisson fece nel 1813 (Poisson, 1813).[24] Sia Green sia Gauss riprenderanno successivamente nelle proprie ricerche sulla teoria del potenziale il lavoro di Poisson, nel quale si mostra che l'equazione di Laplace è un caso particolare dell'equazione, oggi detta di Poisson, $\Delta V = f$.

Per quanto esposto in precedenza, riteniamo di poter affermare che la prima pietra nello sviluppo di una teoria del potenziale sia stata posta proprio da Laplace. Una disquisizione dettagliata sul ruolo dell'equazione di Laplace nell'evoluzione della teoria del potenziale sarebbe un argomento interessante, ma riteniamo che essa richiederebbe una trattazione a parte, che va decisamente oltre il limite che ci siamo posti per il presente lavoro.

[23] Siméon-Denis Poisson (1781, Pithiviers – 1840, Parigi).

[24] Notiamo in effetti che nel trattato sulla storia della teoria del potenziale di Bacharach (1883, p. 7), l'equazione che oggi porta il nome di Poisson ($\Delta V = -4\pi\rho$) è chiamata "equazione alle derivate parziali di Laplace-Poisson", il che fa notare che all'epoca l'importanza del contributo di Laplace anche in riferimento di tale equazione più generale, era maggiormente riconosciuto.

6. Conclusioni

In conclusione, possiamo affermare che Euler fu il primo a scrivere l'equazione che oggi porta il nome di Laplace nella forma

$$div(\nabla S) = \Delta S = 0, \tag{6}$$

in un lavoro sulla modellizzazione dei fluidi in moto, che presenta un metodo successivamente generalizzato ad altri fenomeni fisici. Laplace, che conosceva il lavoro di Euler e aveva studiato e ben compreso la sua portata innovatrice nonché il ruolo centrale dell'equazione da lui ottenuta, intuì che il potenziale gravitazionale avrebbe dovuto verificare l'equazione in (1) e mostrò che (nel vuoto) questa congettura era corretta, iniziando poi una ricerca sistematica delle soluzioni.

È possibile inoltre affermare che l'errore che commise Laplace nel considerare anche il potenziale all'interno di un corpo come soggetto all'equazione (1) si è rivelato in realtà un passaggio significativo verso lo sviluppo degli aspetti matematici che avrebbero portato alla versione non omogenea dell'equazione (1), cioè $\Delta u = f$. Con Laplace iniziò dunque la teoria del potenziale, che comprende tutti gli strumenti teorici per la risoluzione dei problemi relativi all'equazione $\Delta u = f$ (potenziali newtoniani, nuclei di Poisson, funzioni di Green, formule di media, capacità) e alle sue applicazioni ai conduttori elettrici e ai condensatori.

In conclusione, l'importanza del lavoro di Laplace riguardo all'equazione in questione è stata fondamentale ma non possiamo dimenticare che Euler fu il primo a scriverla e a fornire molti elementi utili per il successivo lavoro di Laplace. Riteniamo perciò che, nonostante dal punto di vista meramente storico-cronologico la paternità dell'equazione sia da attribuire a Euler, sia per il modo mirato con cui Laplace la usa, sia per le ricadute che il suo lavoro con essa ha avuto sugli sviluppi della teoria del potenziale e sulle applicazioni alla teoria dell'elettromagnetismo, dal punto di vista epistemologico sia corretto sottolineare il contributo di Laplace nell'attribuzione di un nome all'equazione. Crediamo pertanto che essa dovrebbe portare il nome di entrambi, cioè chiamarsi "equazione di Euler-Laplace".

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano i referee le cui profonde e pertinenti osservazioni hanno contribuito a migliorare la versione iniziale dell'articolo.

Riferimenti bibliografici

Archibald, T. (2003). L'Ottocento: matematica. Equazioni differenziali alle derivate parziali. *Enciclopedia Treccani: Storia della Scienza*. Disponibile da www.treccani.it

Bacharach, M. (1883). *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie*. Göttingen: Vandenkoeck & Ruprecht.

Bernoulli, D. (1738). *Hydrodynamica*. Basilea: Joh. Henr. Deckeri. Disponibile da https://archive.org/details/bub_gb_VP5xrx373N4C

Bottazzini, U. (1981). *Il calcolo sublime: Storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*. Torino: Boringhieri.

Boyer, C. B. (1959). *The rainbow: From myth to mathematics*. New York: Yoseloff.

Cannell, D. M., & Lord, N. J. (1993). George Green, mathematician and physicist 1793–1841. *The Mathematical Gazette, 77*(478), 26–51. doi:10.2307/3619259

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia: Dagli ultimi bagliori della Grecia antica alla fine del Medioevo*. Bari: Dedalo.

Euler, L. (1757a). *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides.* The Euler archive, E225. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E225.html (Lavoro originale pubblicato in *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 11, 1757, pp. 217–273).

Euler, L. (1757b). *Principes généraux du mouvement des fluides*. The Euler Archive, E226. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E226.html (Lavoro originale pubblicato in *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 11*, 1757, pp. 274–315).

Euler, L. (1761). *Principia motus fluidorum.* The Euler Archive, E258. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E258.html (Lavoro originale pubblicato in *Novi Commentarii accademiae scientiarum Petropolitanae 6*, 1761, pp. 271–311).

Euler, L. (1770). *Sectio secunda de principiis motus fluidorum.* The Euler Archive, E396. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E396.html (Originariamente pubblicato in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 14*, 1770, pp. 270–386).

Euler, L. (1771). *Sectio tertia de motu fluidorum.* The Euler Archive, E409. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E409.html (Originariamente pubblicato in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 15*, 1771, pp. 219–360).

Gauss, K. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte*. Leipzig: Weidmann. Disponibile da http://www.deutschestextarchiv.de/book/view/gauss_lehrsaetze_1840?p=26

Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French mathematics, 1800–1840* (Voll. 1–3). Basel: Birkhäuser.

Green, G. (1828). *An essay on the mathematical analysis of electricity and magnetism*. Nottingham: T. Wheelhouse. [Ristampato in tre parti in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (1850), *39*(1), 75–89; (1852), *44*(4), 356–374; (1854), *47*(3), 161–211].

Laplace, P. S. (1782). Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes. *Ouvre complètes de Laplace* (Vol. 10, pp. 341–419). Paris: Gauthier-Villars. Disponibile da http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775981/f350

Laplace, P. S. (1787). *Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturn*. *Oeuvre complètes de Laplace* (Vol. 10, pp. 275–292). Paris: Gauthier-Villars. Disponibile da http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77599c/f280

Laplace, P. S. (1799). *Traité de mécanique céleste* (Voll.1–2). Paris: Duprat.
Lolli, G. (1985). *Le ragioni fisiche delle dimostrazioni matematiche*. Bologna: il Mulino.
Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia matematica*. London: Benjamin Motte.
Poisson, S. D. (1813). Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes. *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 3*, 388–392.
Rouse Ball, W. W. (1908). *A short account of the history of mathematics*. New York: Dover.
Todhunter, I. (1962). *A history of mathematical theories of attraction and figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace* (Voll. 1–2). New York: Dover. (Lavoro originale pubblicato nel 1873).