Chapitre 6

Instruments de l'histoire pour enseigner et apprendre : le cas des machines mathématiques

Michela Maschietto
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane

Laboratorio delle Macchine Matematiche
Università di Modena e Reggio Emilia (Italie)

I. Introduction

Dans ce texte, on s'intéresse à l'usage d'instruments, nommés « machines mathématiques »[1], dans une perspective didactique, c'est-à-dire à la façon dont ils sont utilisés dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Bartolini Bussi et Maschietto, 2006). Le texte de présentation du colloque dont est issu cet ouvrage fait écho aux pratiques des enseignants qui construisent les machines mathématiques depuis vingt ans[2] : « La perplexité de l'enseignant de mathématiques et/ou de physique confronté à l'incompréhension de ses élèves, se formule très souvent dans la question "comment donner du sens – voire comment redonner du sens – à notre enseignement ?" » En effet, une de leurs préoccupations était de trouver des moyens et des situations pour intéresser les élèves, avec des aspects historiques, mais aussi d'introduire la manipulation dans l'activité des élèves et l'utilisation d'instruments dans leur pratique didactique. On retrouve ici l'idée de « favoriser l'usage des instruments dans l'enseignement, explorer les connaissances sous-jacentes à leur conception et à leur usage, et les utiliser dans des démarches d'investigation ». Nos machines mathématiques sont donc des instruments liés à l'histoire des mathématiques, mais construits pour la classe avec un but didactique. Elles sont également utilisées pour la diffusion de la culture scientifique, en particulier mathématique, dans des expositions en Italie et à l'étranger.

Le but de ce chapitre est de partager des éléments de construction et d'analyse de situations d'apprentissage impliquant des instruments, développés par la recherche en didactique des mathématiques. Dans cette perspective, les machines mathématiques sont introduites pour faire la médiation de significations mathématiques plutôt que pour résoudre des problèmes, pratiques ou théoriques, comme on en trouve dans l'histoire des mathématiques. Cela ne signifie pas que nous ne considérons pas la composante « poser et résoudre de problèmes », mais en général l'entrée n'est pas un problème dont la résolution est faite par l'utilisation d'une machine. Elle apparaît après dans les parcours didactiques.

Ce texte est composé de quatre parties. La première partie présente les machines mathématiques. Des éléments théoriques fondant l'approche didactique qui s'ensuit sont esquissés dans la deuxième partie et sont ensuite utilisés dans l'analyse d'un exemple. Les conclusions terminent le chapitre.

[1] http://culturemath.ens.fr/content/le-laboratoire-des-machines-mathématiques
[2] Associazione Macchine Matematiche: http://www.macchinematematiche.org

II. Machines mathématiques : quoi et pourquoi ?

Dans ce texte, nous nous référons aux machines mathématiques, ainsi définies par le constructeur M. Pergola (NRSDM, 1992) :

> « Une machine mathématique (liée au domaine de la géométrie) a le but précis (lequel ne dépend pas de son usage effectif) de résoudre le problème suivant : obliger un point, ou un segment, ou une figure quelconque (soutenus par un support matériel approprié qui les rend visibles) à se déplacer dans l'espace ou à être transformé en accord avec une loi mathématiquement définie [par le constructeur]. »[3]

Une machine mathématique peut donc être un traceur de courbe, un système articulé pour les transformations géométriques ou un perspectographe pour dessiner en perspective. Une machine mathématique bien connue et que nous utilisons tous est le compas, qui est bien présent dans l'iconographie des mathématiques et peut être considéré comme l'ancêtre des traceurs de courbes. Elles sont reconstruites à partir de recherches historiques et gardent ce lien avec l'histoire. Plus précisément, les descriptions contenues dans les traités mathématiques permettent d'accompagner leur introduction d'une présentation de la vie de certains mathématiciens et d'une iconographie importante (les dessins sont souvent très différents de ce que nos élèves rencontrent habituellement). C'est pour renforcer la relation machine-mathématicien-histoire que le nom des machines contient souvent celui du mathématicien qui l'a conçue et/ou décrite. Ces aspects deviennent très importants pour le développement d'une vision positive des mathématiques, pas seulement pour les élèves, mais aussi pour le grand public lors d'expositions.

Prenons comme exemple la machine de la figure 1.

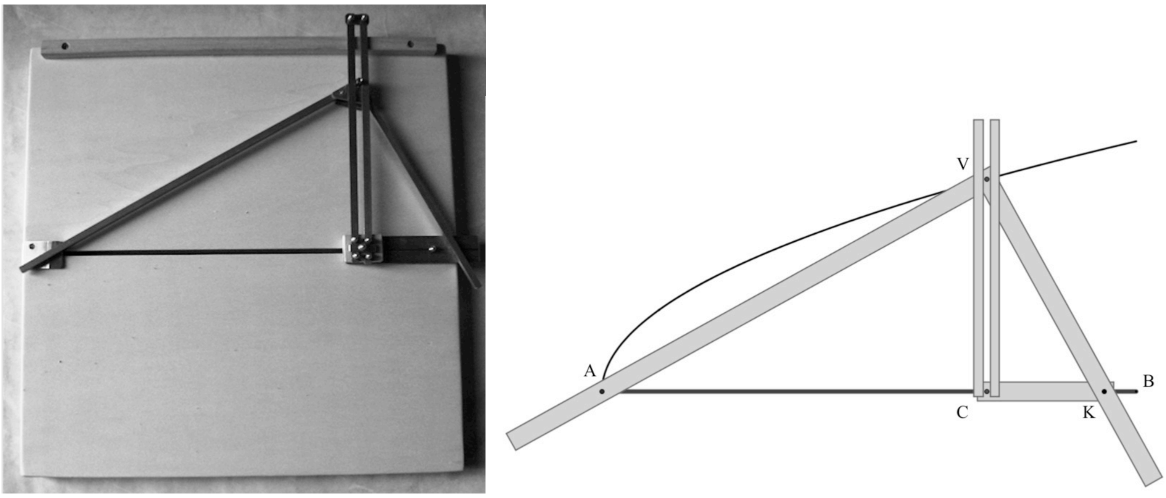

Figure 1. Traceur de parabole de Cavalieri et sa simulation

Il s'agit du traceur de parabole que Bonaventura Francesco Cavalieri décrit dans le Chapitre XLVI de *Lo Specchio Ustorio* « Comment on décrit la parabole, par le moyen d'instruments rigides, composés de règles, ce qui constitue le deuxième mode d'invention véritablement plane »[4] (Cavalieri, 1632). Dans ce traité, Cavalieri d'abord rappelle certaines propriétés des sections coniques et puis il s'intéresse à la question du tracé de ces courbes. Il présente trois manières de décrire les coniques, dont la deuxième correspond à notre exemple.

[3] Traduction par l'auteur.

[4] Traduction par l'auteur et révisé par le relecteur anonyme.

En se référant à la figure 1 (à droite), Cavalieri décrit l'instrument comme composé de deux équerres (une équerre avec l'angle droit $\angle$VCK et l'autre avec l'angle droit $\angle$AVK), telles que : le côté CK coulisse dans la fente AB; trois pivots contraignent l'équerre AVK à passer en A et K et le sommet V à évoluer le long de la tige (mobile également) perpendiculaire à CK. La tige CK a une longueur égale au *latus rectum l* de la conique. Sous toutes ces contraintes, le crayon placé en V trace une courbe lorsque CK se déplace le long de AB. Il s'agit d'une parabole parce que $VC^2 = AC*CK$, c'est-à-dire $VC^2 = AC*l$, ce qui est la propriété caractéristique de cette conique dans la théorie des sections coniques d'Apollonius (Apollonius, in Ver Eecke 1923).

Dans notre reconstruction (figure 1, à gauche) il y a un support en bois avec une fente ; au milieu du support, nous avons placé le pivot A ; les équerres sont fabriquées en laiton. Au sommet V, il y a un trou pour placer une mine de crayon. En raison de contraintes de construction, on ne peut dessiner qu'un arc de parabole (figure 1). Cette machine est pour nous intéressante, parce qu'elle permet de faire un lien entre la théorie grecque des sections coniques (en particulier, la conception des coniques comme courbes solides, obtenues et étudiées dans le cône), la propriété caractéristique de la courbe comme relation entre points et segments (pour nos élèves, la courbe est reconnue par son équation et à partir du foyer) et la question du tracé de la courbe par mouvement continu. Ces liens correspondent aux buts pour lesquels les machines mathématiques ont été construites : renouveler l'enseignement des mathématiques, montrer les racines historiques et culturelles des mathématiques et motiver l'étude des élèves (Bartolini Bussi, 2005). L'instrument que l'on vient de présenter est proposé dans le parcours didactique sur les sections coniques (sujet important dans l'enseignement secondaire italien), avec sa version numérique (figure 1, à droite).

Au fil des ans, la dénomination de machine mathématique a également été étendue aux instruments arithmétiques fonctionnant de façon mécanique. Un exemple est la Pascaline de Blaise Pascal. Ne pouvant travailler avec un spécimen de la Pascaline, les expérimentations didactiques ont été menées avec un instrument en plastique, appelé *pascaline Zero+1*, composé de roues dentelées agencées de manière à automatiser la retenue (Maschietto, 2015 ; Maschietto et Savioli, 2014).

La section qui suit contient les éléments théoriques fondant le travail didactique avec les machines mathématiques.

III. Machines mathématiques, enseignement et apprentissage

L'utilisation d'instruments dans l'enseignement des mathématiques est promue dans le cadre du laboratoire de mathématiques, en cohérence avec les documents de la Commission UMI-CIIM (Anichini et al., 2004). Le laboratoire de mathématiques y est vu comme une série d'indications méthodologiques plutôt qu'un lieu physique (comme une salle), favorisant les interactions entre élèves, et entre élèves et enseignant. Quand un instrument est introduit en classe, on sollicite un certain travail et on vise un lien avec une certaine connaissance mathématique. Les instruments sont vus dans leurs fonctions instrumentales, pour accomplir une tâche et pour modéliser, et dans leur fonction culturelle, comme médiateur de significations mathématiques et de la culture mathématique.

Dans notre cas, la fonction culturelle est davantage sollicitée, dans le sens que l'enseignant utilise les machines dans un processus de médiation de savoir mathématique. Autrement dit, par l'interaction avec les instruments, entre les élèves et l'enseignant et suivant des consignes précises, les élèves ont accès au savoir mathématique embarqué dans les machines proposées. En même temps, l'exploration et l'usage favorisent des processus de production de conjecture et d'argumentation, voire de preuve au niveau du lycée.

Suivant le cadre théorique de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008), le choix d'une machine est lié aux objectifs didactiques de l'enseignant pour la classe et se fonde sur ce qui est nommé « le potentiel sémiotique » de la machine, c'est-à-dire sur l'analyse de la machine prenant en compte son lien avec l'histoire, les modes (schèmes) d'utilisation, les significations embarquées et liées aux usages. L'organisation didactique prévoit trois moments constituant le cycle didactique : travail en petit groupe, discussion mathématique collective guidée par l'enseignant, et travail individuel. Chaque parcours didactique débute par le travail avec la machine et porte sur les quatre questions suivantes : 1) *Comment est faite la machine ?* 2) *Que fait-elle et comment le fait-elle ? 3) Pourquoi trace-t-elle une certaine courbe ou réalise une certaine transformation géométrique ?* 4) *Que se passe-t-il si… ?* Les deux premières questions ont pour objectif de soutenir le processus d'appropriation de la machine par l'analyse de sa structure et la constitution des schèmes d'utilisation (Maschietto et Trouche, 2010), avec une production de textes, descriptions et dessins. Elles poussent aussi à formuler des conjectures sur les produits de la machine ou, au moins, à interpréter ces produits. La troisième question ouvre l'accès à la pensée théorique et au savoir évoqué par la machine. Cette question peut être posée déjà dans le travail de groupe si le répertoire des élèves contient les éléments permettant d'y répondre ; autrement des consignes intermédiaires doivent être prévues. La quatrième question correspond à la méthode de la recherche variée, dans le sens où l'on cherche à varier les paramètres de la machine tout en obtenant le même produit ou bien à changer des composantes connectées aux invariants pour obtenir un produit différent. Un aspect pris en compte dans ces activités est le rôle de plus en plus reconnu de la composante gestuelle et non verbale dans la conceptualisation mathématique, sur la base d'une approche multimodale à l'apprentissage-enseignement des mathématiques (Arzarello, 2006).

IV. Les machines mathématiques pour les transformations géométriques

Nous reprenons les références théoriques dans un exemple sur les transformations géométriques, en considérant un système articulé pour la symétrie orthogonale (figure 2) et un autre pour la transformation affine nommée dilatation (figure 3). Leur exploration et étude de la part de l'élève va permettre de reconnaître le type de transformation, ainsi que certains invariants.

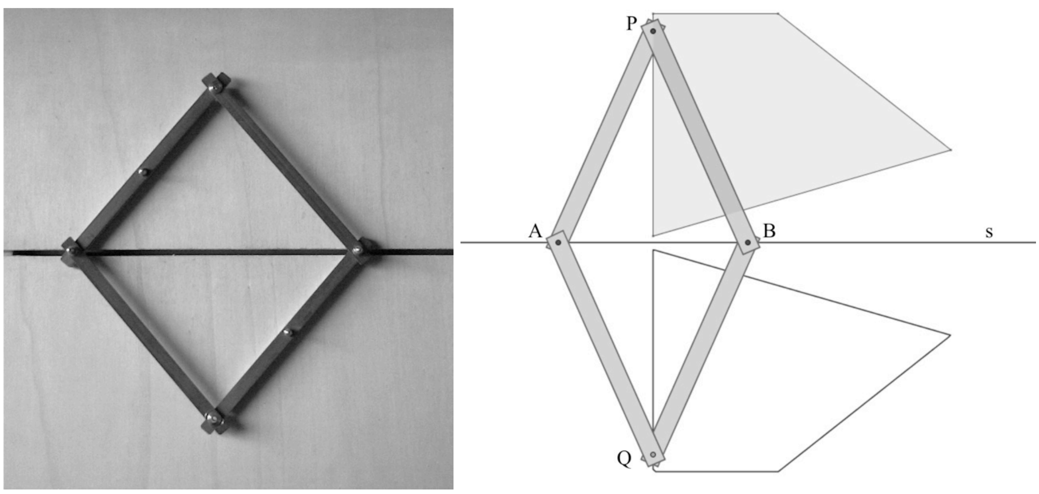

Figure 2. Symétrie orthogonale

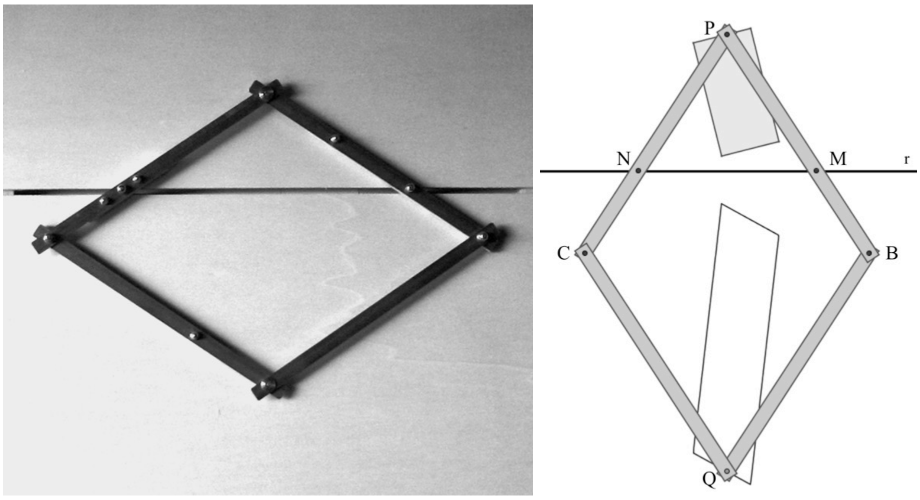

Figure 3. Dilatation

1. Analyse du potentiel sémiotique

Au XVIIe siècle, les systèmes articulés acquirent une importance théorique (Pergola et al., 2002), mais c'est au fil du XIXe siècle, quand la théorie des transformations se développa, que l'intérêt se renouvela, comme le témoigne G. Koenigs dans ses *Leçons de cinématique* de 1897 :

> « La théorie des systèmes articulés ne date que de 1864. Sans doute on les a utilisés bien avant cette époque ; [...]. Lorsque, en 1631, le P. Scheiner publia pour la première fois la description de son pantographe[5], il ne connut certainement pas l'idée générale dont son petit appareil n'était qu'une manifestation naissante ; on peut même affirmer qu'il ne pouvait pas la connaître, car cette idée tient à la notion élevée de la transformation des figures, notions qui appartient à notre siècle et donne un caractère uniforme à tous les progrès qu'il a vus s'accomplir.
>
> Le mérite de Peaucellier, de Kempe, de Hart, de Lipkine est moins d'être parvenu à tracer avec des systèmes articulés telle ou telle courbe particulière, que d'avoir aperçu les moyens de réaliser avec ces systèmes de véritables transformations géométriques.
>
> Dans cette remarque réside ce qu'il y a de vraiment général dans la théorie des systèmes articulés. » (Koenigs 1897, p. 243)

Par exemple, le deuxième système articulé que nous considérons dans cette section (figure 3) est décrit dans un traité de 1895 de N. Delaunay (figure 4).

[5] http://archiviomacmat.unimore.it/PAWeb/Sito/Francese/216f.htm Voir aussi (Bénard, 2014).

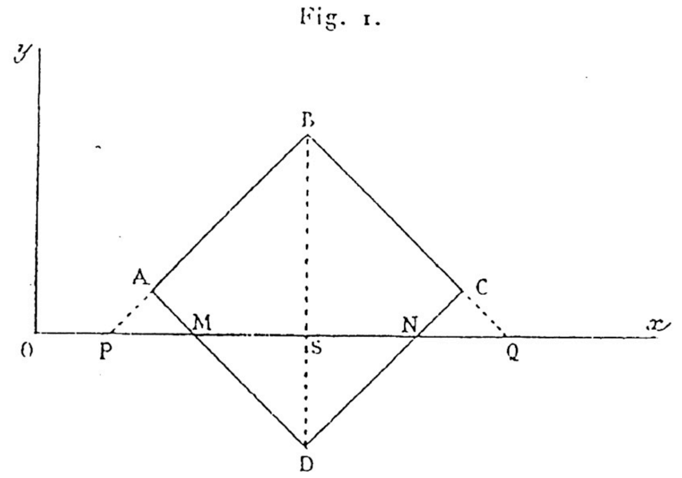

Figure 4. Projecteur de Delaunay (1895, p. 240)

Une idée de base pour la conception de ces systèmes consistait dans l'identification des parties qui restent semblables entre elles à l'intérieur d'une figure en train de se déformer (Pergola et al., 2002). De cette manière, dans l'analyse de ces configurations géométriques, variables par le mouvement, on vise les propriétés ou relations qui ne changent pas. Elles sont ainsi embarquées dans le système en assurant de caractériser le produit de l'instrument. Dans ces systèmes, les figures géométriques ne sont pas observées comme des objets isolés, mais comme composantes de la machine à lier et assembler. Dans cette perspective, la structure et le mouvement de certaines composantes de la machine sont déterminés par la finalité pour laquelle elle a été construite.

Quand une machine est donnée dans les mains des élèves, il faut prévoir une phase de description de la machine (émergence de ses composantes) et une phase de manipulation, d'abord libre et puis finalisée. Ces phases sont considérées comme constitutives du processus de genèse instrumentale (Maschietto et Trouche, 2010). Par l'usage d'un objet avec une tâche précise à accomplir, le sujet développe des schèmes d'utilisation, qui sont susceptibles d'évoluer dans le temps. Derrière ces schèmes, il y a des connaissances mathématiques qui doivent émerger par l'activité de l'élève et l'action de l'enseignant. Dans un certain sens, l'élève travaille à l'envers par rapport au constructeur. La genèse instrumentale inclut aussi des processus consistant à modifier l'objet matériel même pour satisfaire de nouveaux problèmes et de nouvelles tâches.

Les machines de cette section sont composées d'un losange articulé et d'un plan en bois avec une fente. Dans le premier cas (figure 2), deux sommets opposés du losange sont contraints à glisser dans la fente, tandis que les deux autres sommets sont libres d'être déplacés sur le plan de la machine. Dans le deuxième cas les deux points glissant dans la fente sont choisis sur les côtés du losange à la même distance du sommet libre en commun (DM = DN, figure 4). Elles réalisent une correspondance locale entre points de deux régions limitées du plan en les liant physiquement, et embarquent des propriétés qui caractérisent les transformations visées. En particulier, la première machine réalise une symétrie orthogonale entre P et Q (figure 2) en exploitant le fait que le segment (PQ) est une diagonale du losange perpendiculaire à l'autre diagonale (AB) qui coïncide avec la fente. La deuxième machine (figure 3) réalise une dilatation le long la direction perpendiculaire à x (la fente) et de rapport k. En se référant à la figure 4, soit l le côté du losange, d la distance de D à M et N et k le rapport entre les distances des points B et D de la droite x. Les côtés BA et BC sont prolongés jusqu'à la droite

x. Par la similitude des triangles (DNM) et (PBQ), on a BS/SD = BP/DM = (BA + AP)/DM = $(l + (l - d))/d$. On conclut alors que $k = (2l - d)/d$.

En ce qui concerne les schèmes d'utilisation, on en identifie trois :

1) deux mines de crayon sont placées dans les trous en correspondance des points libres P et Q (appelés points traceurs). En déplaçant les sommets libres du losange, les deux mines dessinent en même temps dans les deux demi-plans de la machine ;

2) une figure est dessinée dans un demi-plan, disons celui de P, qui est ainsi appelé point pointeur ; une mine de crayon est mise dans l'autre point libre Q (le point traceur) : quand le point pointeur P suit le contour de la figure, le point traceur Q dessine la figure correspondante dans son demi-plan ;

3) les deux points libres peuvent être considérés comme pointeurs à partir de figures dessinées dans les deux demi-plans.

Les trois schèmes d'utilisation émergent par trois tâches différentes : 1) dessiner deux figures symétriques en même temps ; 2) dessiner la figure symétrique d'une figure donnée déjà tracée sur un demi-plan de la machine ; 3) vérifier si deux figures sont symétriques. En même temps, on aborde les significations de variation et co-variation (quand le mouvement d'un point détermine celui d'un autre point), celle de correspondance entre points de deux ensembles, l'aspect global (surtout mis en jeu dans les deux premiers schèmes) et l'aspect ponctuel (surtout dans le troisième schème) des transformations géométriques (Jahn, 1988). Enfin, les rôles de traceur et pointeur peuvent s'échanger, avec la signification mathématique de correspondance entre points du plan plutôt qu'entre les deux demi-plans, ce que la machine pourrait renforcer.

Dans l'analyse du potentiel sémiotique, on inclut aussi la possibilité d'en modifier la structure, la longueur des côtés (et donc le type de quadrilatère utilisé) et les contraintes sur les points. C'est bien le cas de ces deux machines : la différence structurelle importante entre les deux tient au choix de points glissant dans la fente (sommets ou points sur les côtés).

2. Parcours didactiques

L'expérimentation de parcours didactiques ne demande pas seulement la conception de fiches pour les élèves, mais aussi la structuration de cycles didactiques et du rôle de l'enseignant.

Les parcours avec ces deux machines sont proposés au collège (12-13 ans) et au début du lycée (14-16 ans) ; ils peuvent se différencier à partir de la question sur le « pourquoi ». Pour le collège, les prérequis sont la notion de symétrie, qui est surtout globale et perceptive, et les propriétés des quadrilatères. L'objectif de ces parcours est le passage à la définition ponctuelle de la symétrie orthogonale et à la construction géométrique de figures symétriques. Les données mentionnées dans la suite se réfèrent à des expérimentations sur la symétrie axiale au collège.

Phase 1. Exploration de la machine au moyen de deux fiches.

Voici un extrait des réponses d'un élève.

« Fiche1. Comment est faite la machine ?

1) Explore la machine devant toi, y a-t-il des composantes mobiles ? Si oui, lesquelles ? *Oui, le polygone au centre est formé de 4 tiges égales que l'on peut articuler de plusieurs manières. Il est maintenu par des vis lui permettant de bouger.*

4) Quelle est la figure géométrique formée par les tiges ? *Losange, carré et parallélogramme.*
Ecris les propriétés de cette figure géométrique. *Le losange a les diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu. Le carré a les côtés égaux ; c'est un losange particulier. Le parallélogramme a les côtés parallèles 2 à 2.* »

Dans presque toutes les expérimentations, tant au collège qu'au lycée, les réponses à la Question 4 offrent des occasions de discussions intéressantes sur la classification des quadrilatères, mettant en jeu les conceptions des élèves ainsi que leurs représentations. La Question 5 de la Fiche 1 demande aux élèves de dessiner la figure qu'ils ont identifiée. Les productions d'élèves montrent une variété de représentations de l'objet matériel avec ou sans lettres aux sommets, vu du dessus, ou de la structure mathématique, avec ou sans lettre aux sommets. Dans la description de la structure, on peut trouver que « la machine a deux sommets soumis à des contraintes et qui peuvent se déplacer seulement de manière horizontale ou verticale et deux [sommets] qui peuvent se déplacer dans toutes les directions ». En accord avec nos références théoriques didactiques, le dessin est une étape du processus d'exploration et d'appropriation de la machine même.

Dans la Fiche 2, sur les modes d'utilisation, nous avons fait le choix de suggérer le premier schème parmi ceux présentés auparavant. Cela repose sur l'objectif de faire dessiner globalement deux figures symétriques à la fois et d'expérimenter les mouvements symétriques des points libres.

« Fiche 2. Ce que fait la machine.

2) En déplaçant un traceur, que fait l'autre ? *L'autre traceur bouge également mais en miroir.*

3) Si tu dessines un triangle avec un traceur, que fait l'autre traceur ? *L'autre traceur dessine un triangle à son tour.*

4) Il y a des régions du plan dans lesquelles tu ne peux pas dessiner avec la machine. Identifie dans quelles régions on peut dessiner et où on ne peut pas. Trace le contour des régions ci-dessous.

Est-ce que tu reconnais des figures dans les contours tracés ? Si oui, lesquelles ? *Oui, je reconnais 2 espèces de "volcan" qui semblent 2 demi-cercles en le voyant de côté.*

9) Dessine un cercle dans une des régions du plan ; si le pointeur parcourt ce cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, que fait le traceur ? *Le traceur fait le même cercle mais dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.* »

Des descriptions apparaissent, avec les termes « symétriques » (« On obtient des figures symétriques à celles données, c'est-à-dire ayant des dimensions égales mais dans le sens opposé »), « en miroir » (« Les figures que nous avons obtenues sont placées au contraire par rapport aux figures du pointeur, comme si la fente sur la tablette de bois était un miroir »). Dans la fiche, on passe enfin au deuxième schème (Question 9).

Les deux fiches fournissent des éléments (ou « textes situés ») à exploiter dans le travail collectif à venir par l'enseignant, qui a pour but d'amener les élèves à partager les observations faites, à les comparer, à se mettre d'accord sur certains termes. Par exemple, les réponses des élèves contiennent souvent le mot « même », pour indiquer une caractéristique des figures produites par la machine et pour en décrire le comportement. Le travail de l'enseignant est de préciser les usages en relations à la symétrie sans donner lui-même tout de suite une définition. À la fin de cette phase, les élèves apprennent ce que la machine réalise.

Phase 2. Pour prendre en charge l'enseignement du passage à une définition ponctuelle de la symétrie, nous avons structuré la deuxième phase (Bettini, Facchetti et Maschietto, 2012), où notre machine est utilisée comme instrument de médiation sémiotique du point de vue ponctuel (Jahn, 1998). Le problème posé est le suivant : « Place la figure avec le bord rouge sur la base de la machine, en faisant coïncider un côté de la feuille avec la fente. Place la feuille avec le bord frisé sur l'autre plan de la machine de façon telle que la figure soit symétrique de la figure avec le bord rouge [par rapport à la fente] » (figure 5). On sollicite également : « Explique soigneusement comment tu as fait ». Cette tâche demande aux élèves de choisir deux points correspondant dans les figures symétriques et de les mettre en relation au moyen du losange. Elle pousse à avoir un point de vue ponctuel sur les figures et la transformation en jeu.

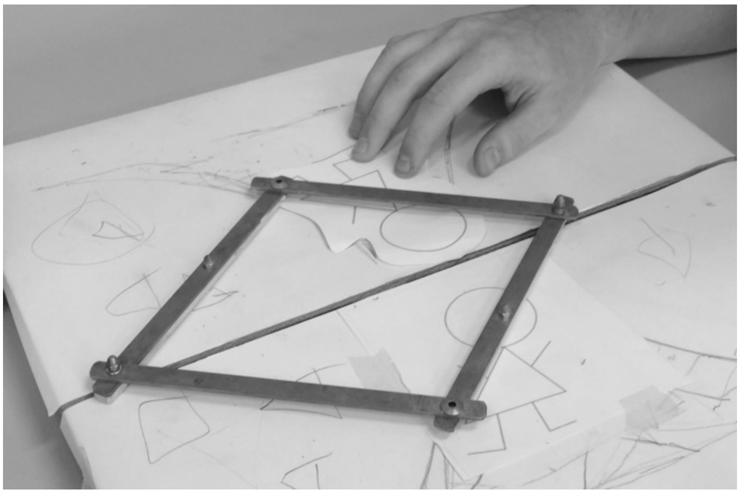

Figure 5. Travail avec les bonshommes rouge et bleu

Les élèves doivent ensuite construire un losange et l'utiliser pour placer les deux bonshommes sur leur feuille. Enfin, ils doivent déterminer le symétrique d'un point P au papier/crayon et expliquer quelle est la caractéristique du losange assurant le résultat (par exemple, « les diagonales sont perpendiculaires entre elles et se coupent en leur milieu »).

Phase 3. Cette phase correspond à la modification de la machine : on demande si l'on peut changer le losange en une autre figure géométrique tout en réalisant la même transformation géométrique (figure 6), ce qui requiert de rendre explicites les caractéristiques du losange liées à la transformation.

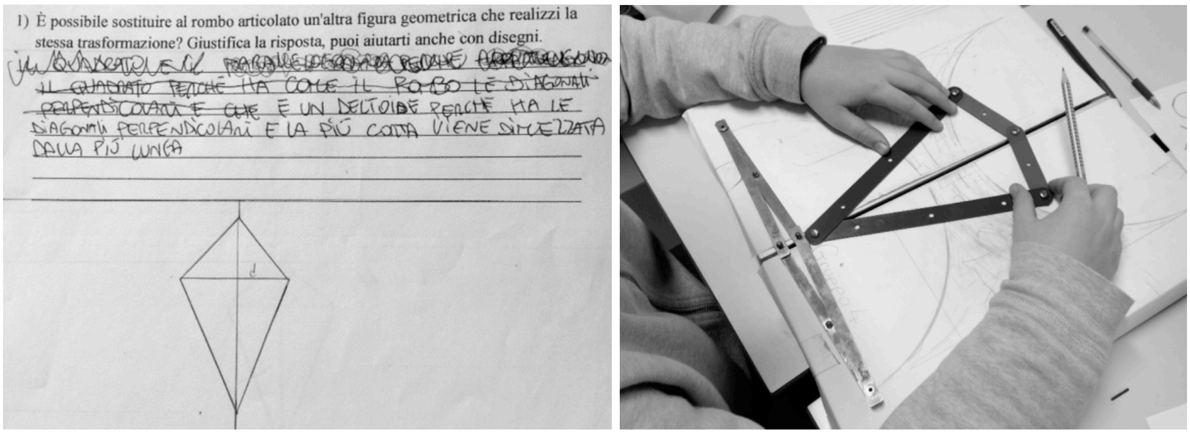

Figure 6. Variation de la machine

Les élèves du secondaire, après la machine pour la symétrie, travaillent avec la machine pour la dilatation (figure 7). Entre les deux parcours, il y a bien sûr des différences. Une première différence porte sur les questions posées : par exemple, au lycée on demande le « pourquoi » à la fin du travail en groupe. Une autre différence consiste dans la requête de construire les simulations des machines dans l'environnement de géométrie dynamique ou la détermination des équations des transformations.

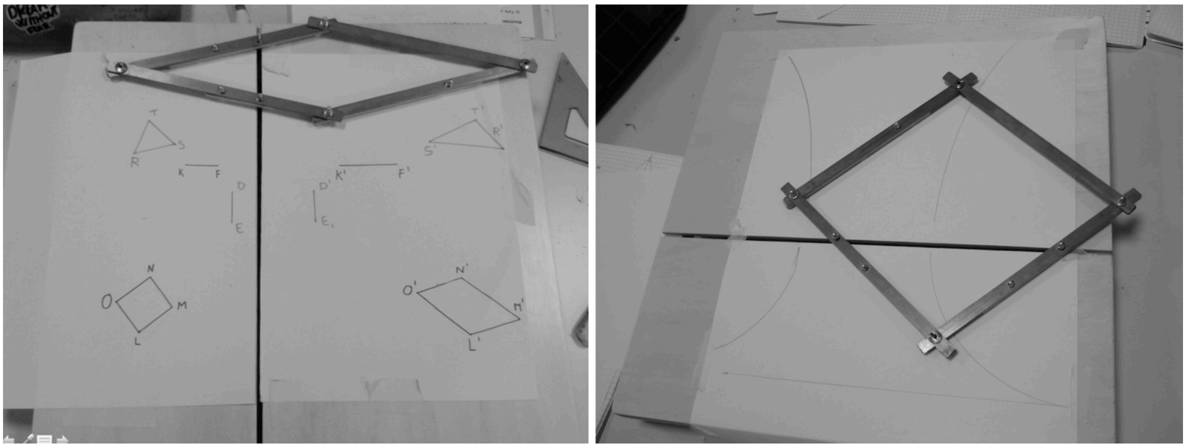

Figure 7. Dilatation

V. En guise de conclusion

Dans cette contribution nous avons montré un cas d'utilisation des machines mathématiques dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Elles sont proposées aux élèves selon la méthodologie du laboratoire de mathématiques, prévoyant un travail en groupe avec la machine, des moments de discussion collective et des productions individuelles des élèves. Dans cette contribution nous avons voulu aussi mettre en évidence l'analyse didactique que nous menons sur les machines, comment nous les utilisons et leur lien avec l'histoire des mathématiques, qui entre en classe comme histoire des machines. Elles sont choisies par l'enseignant comme instruments de médiation sémiotique, c'est-à-dire pour faire la médiation de significations mathématiques auprès des élèves, à partir de cette analyse didactique. L'observation des processus d'exploration des élèves montre que ce type d'activité permet de conjuguer le savoir mathématique avec des aspects comme la manipulation, l'interaction entre pairs et l'interaction avec l'enseignant. Elle montre également que les élèves formulent des conjectures et proposent des argumentations, mais en même temps la difficulté à passer de l'exposition orale à la forme écrite. Comme dernier élément, signalons l'engagement positif des élèves. Nous pensons que ce type de travail ouvre des nouvelles perspectives pour les enseignants et pour les chercheurs, en didactique et en histoire de mathématiques.

Bibliographie

ANICHINI Giuseppe, ARZARELLO Ferdinando, CIARRAPICO Lucia, ROBUTTI Ornella (dir), 2004, *Matematica 2003. La matematica per il cittadino*, Lucca, Matteoni stampatore.

APOLLONIUS, 1923, *Les coniques*, trad. Paul Ver Eecke, Les Coniques d'Apollonius de Perge, Bruges.

ARZARELLO Ferdinando, 2006, « Semiosis as a multimodal process », *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, p. 267-299.

BARTOLINI BUSSI Maria Giuseppina, 2005, « The meaning of conics: historical and didactical dimensions », *in* J.Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, P. Valero (dir.), *Meaning in Mathematics Education*, Springer, p. 39-60.

BARTOLINI BUSSI Maria Giuseppina, MARIOTTI Maria Alessandra, 2008, « Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective », *in* L. English (dir), *Handbook of International research in mathematics education,* New York, Routledge, p. 746–783.

BARTOLINI BUSSI Maria Giuseppina, MASCHIETTO Michela, 2006, *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, Milano, Springer.

BENARD Dominique, 2014, « Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible », in É. BARBIN (dir.), *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses, p. 27-56.

BETTINI Giuliana, FACCHETTI Chiara, MASCHIETTO Michela, 2012, « Costruzione di significati nel laboratorio di matematica: attività con il macchina matematica per la simmetria assiale », *in* O. Robutti, M. Mosca (dir), *Atti del V Convegno DiFiMa2011,* Torino, Kim Williams Books, p. 193-204.

CAVALIERI Bonaventura, 1632, *Lo specchio ustorio*, Bologna, Clemente Ferroni.

DELAUNAY M. N., 1895, « Sur quelques nouveaux mécanismes », *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, p. 240-245.

JAHN Ana Paula, 1998, *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*, Thèse de Doctorat, Grenoble I, Université Joseph Fourier.

KOENIGS Gabriel, 1897, *Leçons de cinématique*, Paris, Librairie Scientifique Hermann.

MASCHIETTO, Michela, TROUCHE, Luc, 2010, « Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories », *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42, p. 33-47.

MASCHIETTO Michela, 2015, « The arithmetical machine Zero+1 in mathematics laboratory: instrumental genesis and semiotic mediation », *International Journal of Sciences and Mathematics Education*, 13(1), p. 121-144.

MASCHIETTO Michela, SAVIOLI Ketty, 2014, *Numeri in movimento. Attività per apprendere l'aritmetica con la pascalina*, Trento, Erickson.

NRSDM, 1992, *Macchine Matematiche e altri oggetti*, Comune di Modena.

PERGOLA Marcello, ZANOLI Carla, MARTINEZ Annalisa, TURRINI Marco, 2002, « Modelli fisici per la matematica: parallelogrammi, antiparallelogrammi e deltoidi articolati », *Progetto Alice*, III (8), p. 323-346.

Communication dans le cadre du projet PANN14T2_00523 « La bottega rinascimentale nella scuola di oggi: storia, strumenti e laboratorio di matematica ».