This is a pre print version of the following article:

Fiori, Carla, Michele, Lalla e Nicoletta, Pacchiarotti. "La preparazione degli studenti di Ingegneria e Economia dopo gli esami di matematica di base" Working paper, MATERIALI DI DISCUSSIONE, Dipartimento di Economia Politica - Università di Modena e Reggio Emilia, 2004.
https://doi.org/10.25431/11380_1021713

Dipartimento di Economia Politica - Università di Modena e Reggio Emilia
Terms of use:

The terms and conditions for the reuse of this version of the manuscript are specified in the publishing policy. For all terms of use and more information see the publisher's website.

12/10/2024 11:27

(Article begins on next page)

\\ 457 \\

La preparazione degli studenti di Ingegneria e Economia dopo gli esami di matematica di base

di

Carla Fiori[1]
Michele Lalla[2]
Nicoletta Pacchiarotti[3]

Marzo 2004

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Dipartimento di Economia Politica
Viale Berengario,51
41100 Modena (Italia)
[1] e-mail: fiori.carla@unimore.it
[2] e-mail: lalla.michele@unimore.it

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Facoltà di Ingegneria
Via Vignolese , 905/a
41100 Modena (Italia)
[3] e-mail: pacchiarotti.nicoletta@unimore.it

INDICE

1. Introduzione

2. Materiali e metodi

3. I risultati dell'indagine
   3.1. Le facoltà rispetto ai caratteri individuali degli studenti
   3.2. Le facoltà rispetto agli esiti del test di matematica
   3.3. Determinanti degli esiti del test di matematica
      3.3.1. Determinanti del punteggio nella facoltà di Ingegneria
      3.3.2. Determinanti del punteggio nella facoltà di Economia
   3.4. Confronto tra le facoltà di Ingegneria e Economia

4. Analfabetismo di ritorno o ritorno di un luogo comune?

5. Conclusioni

Bibliografia

Appendice A. Il questionario
   A1. La tipologia di domande del test
   A2. Prima pagina del questionario per la facoltà di Ingegneria
   A3. Prima pagina del questionario per la facoltà di Economia

Riassunto

La matematica è la «regina delle scienze» perché costituisce il linguaggio di riferimento per tutte le discipline quantitative. Il suo apprendimento è, quindi, fondamentale ed è interessante verificare quale logoramento nel tempo subiscano i concetti di base. Si è condotta, pertanto, una indagine tra gli studenti che frequentano i corsi dal terzo anno in poi delle facoltà di Ingegneria e Economia, sottoponendo loro un test di matematica sulla cognizione dei concetti elementari. I risultati ottenuti mostrano che gli studenti di Ingegneria conoscono i concetti di base meglio di quelli di Economia; tuttavia, se si tiene conto delle condizioni che distinguono i relativi corsi di laurea, allora, la differenza è meno rilevante di quanto appare dagli esiti conseguiti nel punteggio. La struttura dei caratteri che influenzano la prestazione è assai simile; in particolare, le variabili piú predittive sono il voto conseguito all'esame di maturità e il numero di esami di matematica sostenuti all'università. Il tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica non mostra una influenza particolare per entrambe le facoltà; tuttavia, a Ingegneria si può evincere che c'è un'azione concomitante «debole» con altre variabili che, entrando nel modello, «mascherano» la sua influenza. La correlazione tra il tempo trascorso e il punteggio conseguito dagli studenti è comunque sempre negativa.

Introduzione[(*)]

In questi ultimi anni il mondo (pubblico e privato) della formazione è investito e coinvolto in profondi processi di innovazione per adeguare i propri percorsi formativi alle caratteristiche della attuale società in continua evoluzione.

Nelle Università si stanno modificando radicalmente l'organizzazione dei corsi e l'articolazione dei *curricula*: queste devono tener conto, tra l'altro, della «compattazione» dei corsi e della sensibile riduzione del loro monte ore. Le materie formative di base, come la matematica, sono quelle che più soffrono del mutato indirizzo didattico. La riduzione dei programmi e la standardizzazione dei tempi di studio hanno sollevato non poche perplessità sulla profondità della conoscenza da impartire. In particolare, le conoscenze teoriche vengono drasticamente sfrondate e adattate alle applicazioni pratiche. A tutto questo si può aggiungere che i forti mutamenti nella struttura dei corsi universitari, di norma, non vanno di pari passo con i cambiamenti nella didattica dei corsi. La situazione dell'insegnamento della matematica si complica nelle aree interdisciplinari dove le esigenze di approfondimento teorico si devono coniugare con le applicazione pratiche peculiari della formazione «professionale».

In questo contesto emergono, ancora più forti, problemi tanto antichi quanto difficili da affrontare, quali quello del contenuto, della metodologia, della valutazione, in intreccio al cosiddetto «analfabetismo di ritorno» (già a distanza di pochi mesi si ha un decadimento non trascurabile di quanto appreso) e all'atteggiamento individuale degli studenti (esiste una strategia, basata sulla "memoria di lavoro", volta a superare con celerità gli esami e a dimenticare subito dopo le nozioni, specie quando queste non sono utilizzate negli studi successivi, ma hanno solo una funzione formativa).

Tenuto conto che a livello universitario l'insegnamento di un corso si focalizza (anzi, il più delle volte si identifica) attorno alle funzioni della *trasmissione dei saperi* e del *controllo degli apprendimenti,* si comprende come, in questo nuovo scenario, si rende necessario rivedere in modo approfondito i contenuti dei corsi, le loro finalità e la valutazione dell'apprendimento. Come riorganizzare, nel metodo e nel contenuto, la didattica per ottenere il massimo apprendimento? Con corsi che non lasciano più spazio per l'assimilazione dei contenuti, occorre attivare nuovi criteri e metodi di valutazione?

La risposta a tali domande corre un rischio ontologico e paradigmatico perché ogni disciplina ha la sua importanza e non esiste un criterio «oggettivo» per la scelta dei confini; inoltre, vi è una notevole eterogeneità di preparazione fra gli studenti e questo è un ulteriore limite alla «quantità» di conoscenza che si vorrebbe trasmettere. Soprattutto nelle lauree a sbocco "professionale" è importante definire il più possibile quali siano i contenuti e le abilità che si devono valutare (Mascarello, Scarafiotti, 1992). Inoltre, per sottolineare l'importanza della valutazione ottenuta dallo studente alla fine di un corso, si deve ricordare che essa può influire su tutta la carriera scolastica e in particolare concorre a determinare il voto di laurea. In una società in cui si attribuisce piú valore al titolo di studio che al possesso di competenze certificate da quel titolo (Gasperoni,

---

[(*)] Il lavoro è stato eseguito nell'àmbito del progetto «MEtodi e TEcnologie per Innovare e RIorganizzare la DIdattica» (METEIRIDI), approvato e finanziato nel 2000 con le quote riservate per la ricerca orientata all'interno dell'Ateneo dell'Università di Modena e Reggio Emilia. Il testo è frutto della collaborazione degli autori nella sua globalità. Tuttavia, ai fini delle attribuzioni, si precisa che a Michele Lalla è da attribuire il paragrafo 3, a Carla Fiori sono da attribuire i paragrafi 1 e 4, e a Nicoletta Pacchiarotti il paragrafo 2 e l'Appendice; il paragrafo 5 è «comune». Si ringrazia, infine, la dottoressa Laurea Del Carlo che ha collaborato alla raccolta e all'inserimento dei dati su supporto magnetico.

1994a), è lecito chiedersi se il voto di laurea rispecchia ancora una reale differenza di preparazione dei neo-laureati.

La riorganizzazione dei corsi, nei metodi e nei contenuti, coinvolge aspetti della didattica complessi e difficili da trattare e è limitata la letteratura che si occupa nello specifico delle questioni avanzate e è ancora più esigua quella riferita all'insegnamento della matematica. Si vuole qui ricordare come gli aspetti salienti del tema oggetto di riflessione siano stati trattati in letteratura:

— sulla preparazione degli studenti in ingresso all'università e, più in generale, sul rapporto insegnamento secondario e insegnamento universitario della matematica, si possono trovare ampie e approfondite analisi in Accascina *et alii* (1998), Boiti e Fiori (1997), Gasperoni (1994b), Prodi (1989);
— sui processi cognitivi e sulla qualità dell'istruzione c'è ancora un'ampia letteratura (Bloom, 1976; Gagné, 1989; Resnick, Ford, 1991; Silver, 1989; Skemp, 1986) e le indagini Iea-Cede e Ocse;
— sulla memoria di lavoro, ossia su «che cosa rimane» a uno studente dopo un certo periodo di tempo trascorso dall'ultima volta che ha studiato un dato argomento (Miller 1956); «ciò che resta» dipende, tuttavia, anche dalle caratteristiche umane che determinano l'apprendimento (Bloom, 1976; Domenici, 2001; Furinghetti, 1991; Santelli Beccegato, Varisco, 2000; Vertecchi, 1993);
— sulla valutazione esiste una vasta letteratura che riporta quasi esclusivamente le ricerche sugli aspetti tecnici della problematica —misurazione, costruzione di test di profitto, criteri di analisi delle domande o *item*, e cosí via (cfr. Vertecchi 1998 e la bibliografia in esso riportata; Domenici, 2001; Hudson, 1987; Ebel, Frisbee, 1991; Giovannini, 1985, 1986; Linn, 1993)—; mentre sono rimasti più in ombra tutti quegli aspetti che hanno a che fare con la problematica più generale, come «che cosa si valuta», il tipo di relazione fra le abilità cognitive che si vogliono sviluppare e la congruenza con le prove di verifica (Figari, 1994; Hadji, 1992).

Per indagare su questi temi è stata condotta una indagine nelle facoltà di Ingegneria e Economia dell'Università di Modena [e Reggio Emilia] relativa alla matematica di base insegnata al primo anno.[1] Gli obiettivi primarî dell'indagine, presentata di séguito, si possono riassumere nei seguenti punti:

(a) accertamento delle conoscenze di matematica che gli studenti conservano dopo aver sostenuto l'ultimo esame di area matematica previsto nel corso di studio;
(b) raccolta di informazioni su quali siano i temi trattati nei corsi di matematica di base necessari per affrontare positivamente gli altri insegnamenti, sulla loro pregnanza, e su come "ottimizzare" i loro contenuti;
(c) indicazioni su che cosa valutare alla fine di un corso di insegnamento;
(d) aprire un dibattito su queste problematiche e suscitare iniziative che possono fornire contributi concreti per affrontarle.

Per conseguire gli obiettivi enunciati, è stato elaborato un questionario composto di due parti distinte. La prima parte è mirata alla raccolta di informazioni di carattere generale, utili per delineare il profilo dello studente e per elaborare indici statistici. La seconda parte è composta da dodici quesiti a risposta multipla riguardanti i principali argomenti incontrati nei corsi di base: logaritmi, potenze, disequazioni, monotonia, funzioni di una e due variabili, integrali, serie, sistemi lineari. I caratteri rilevati nella prima parte si analizzano rispetto alla prestazione fornita nel test, che è riassunta con un

[1] Con particolare riferimento a queste facoltà, una lettura "divulgativa" dell'insegnamento della matematica, ormai datata, ma piena di riflessioni sempre attuali, si trova in Beltrame e Tagliasco (1990)

punteggio complessivo. Il questionario è stato distribuito agli studenti che frequentavano corsi del 3° e del 4° anno delle facoltà di Ingegneria e Economia.

Nel presente lavoro si riportano in modo dettagliato e si commentano i risultati dell'indagine. Nel paragrafo 2 si descrivono gli strumenti utilizzati nell'indagine e i metodi applicati nell'elaborazione dei dati. Nel paragrafo 3 sono esposti i risultati con i relativi commenti; in particolare, si descrivono i campioni degli studenti partecipanti al test, distinti per facoltà, rispetto a alcuni caratteri, come il corso di laurea, il genere, l'anno di nascita, il tipo di scuola frequentata, il voto di maturità, e il numero di esami di matematica già sostenuti. Si analizza anche l'esito del test, domanda per domanda, e complessivamente rispetto alle caratteristiche individuali, cercando di appurare quali sono le sue determinanti tramite un modello di regressione lineare. Nel paragrafo 4 si illustrano i termini essenziali dell'analfabetismo di ritorno che è presente spesso anche sui media. Nel paragrafo 5 sono esposte le conclusioni. Nell'Appendice A sono riportati un «modello» di domande del test di matematica, ossia gli esercizi somministrati, e i questionari utilizzati.

2. Materiali e metodi

L'indagine è stata condotta nell'A.A. 2001/02 tramite un questionario-test tra gli studenti della facoltà di Ingegneria e della facoltà di Economia dell'Università di Modena, che frequentavano i corsi del terzo, del quarto, e del quinto anno perché si presumeva che la maggior parte avesse già sostenuto e superato gli esami di matematica da qualche tempo. Il questionario è formato da due parti distinte.

La prima parte è mirata alla raccolta di informazioni di carattere individuale (genere, tipo di diploma, voto di diploma di maturità,[2] corso di laurea, anno di iscrizione, condizione lavorativa, numero di esami superati dall'immatricolazione, voti relativi agli esami di matematica, tempo trascorso dall'ultimo esame, voto medio per tutti gli esami sostenuti, e osservazioni sul test) utili sia per delineare il profilo dello studente, sia per appurare i loro effetti sui risultati ottenuti.

La seconda parte è composta da dodici esercizi a risposta multipla, con quattro possibili opzioni, riguardanti diversi argomenti di matematica: logaritmi, potenze, disequazioni, monotonia, funzioni di una variabile (due domande), serie numeriche, integrali (due domande), funzioni di due variabili (due domande), sistemi lineari. Gli argomenti scelti sono quelli ritenuti piú importanti per il prosieguo degli studi e gli esercizi proposti sono stati costruiti per verificare l'effettiva comprensione concettuale degli argomenti; infatti, alcuni di essi presentano due diverse metodologie di soluzione: una rapida basata sulla comprensione del concetto e una calcolativa, che richiede piú tempo.

Per la codifica delle risposte si sono usati: i numeri delle opzioni, che vanno da uno a quattro, quando esse erano errate; il codice cinque, quando erano corrette; il codice sei quando erano diverse da quelle previste (elaborazione autonoma); il codice zero quando erano mancanti (*missing*). Per determinare il punteggio finale, si è assegnato un punto a ogni risposta corretta e zero punti a quelle errate o non date.

Si sono preparati tre questionari (Q1, Q2, Q3), uguali nella prima parte, ma leggermente diversi nella seconda parte, contenente gli esercizi. Si sono predisposti due quesiti (simili, ma non uguali) per ogni argomento, e per ogni test si è scelto uno dei due da inserire e si è modificato anche l'ordine di presentazione. Si sono ottenuti, cosí, questionari con lo stesso livello di difficoltà, ma diversi a prima vista, in modo da ridurre copiature e suggerimenti. Si veda l'Appendice A per un esempio.

Per la distribuzione dei questionari si è chiesta l'autorizzazione ai docenti dei corsi ritenuti idonei agli obiettivi da conseguire, e che costituiscono il carattere «corso frequentato». Nella facoltà di Ingegneria la compilazione è avvenuta durante gli ultimi venti minuti di lezione; in questo modo si era certi che, per coloro che decidevano di collaborare, ci fosse lo stesso tempo a disposizione. Nella facoltà di Economia i questionari sono stati somministrati all'inizio della lezione, per attenuare la tendenza alla fuga generata dall'onere e dal non alto gradimento della materia; il tempo concesso è stato sempre di venti minuti. Hanno partecipato 352 studenti della facoltà di Ingegneria e 202 studenti della facoltà di Economia.

L'elaborazione dei dati è stata eseguita con il programma SPSS (1997a,b,c; Norusis, 1997) e si è limitata a tecniche assai elementari per descrivere i campioni (§3.1 e §3.2): distribuzioni di frequenza, tabelle di contingenza, grafico fusto-e-foglie, e

[2] L'espressione «diploma di maturità» è usata per indicare sinteticamente il «diploma di superamento dell'Esame di Stato conclusivo di Corso di Studio di Istruzione Secondaria Superiore», come denominato nelle disposizioni ministeriali.

qualche test non parametrico (Siegel, Castellan, 1988; Landenna, Marasini 1990). Per individuare le determinanti degli esiti del test di matematica si sono utilizzate le correlazioni, l'analisi fattoriale, e il modello di regressione lineare (Afifi, Clark, 1995; Fabbris, 1997; Stevens, 2002). La definizione delle variabili esplicative (regressori) dei modelli è stata eseguita combinando un criterio di selezione automatica (*backward elimination*) con una scelta di merito (Maddala, 2001, p. 484). Le stime dei parametri dei modelli, come anche le analisi piú elementari, sono state eseguite per facoltà perché si supponeva una specificità che potesse influenzare in qualche modo la loro struttura e i risultati (§3.3 e §3.4).

3. I risultati dell'indagine

3.1. Le facoltà rispetto ai caratteri individuali degli studenti

La Tabella 1 presenta la distribuzione dei test eseguiti secondo il carattere «corso frequentato» dagli studenti al momento della somministrazione. Per la facoltà di Ingegneria, le modalità con frequenza piú elevata sono «Calcolatori elettronici» e «Fisica tecnica» che rappresentano circa il 60%. Gli studenti che frequentano questi corsi sono del terzo e quarto anno, mentre solo il 20% circa dei test è stato sottoposto a studenti del quinto anno frequentanti i corsi di «Termofluidodinamica applicata» e «Ingegneria del Software». Per la facoltà di Economia, le modalità con una frequenza piú elevata sono «Econometria – Statistica 2» e «Economia e gestione delle imprese commerciali».

Nella Tabella 2 sono riportate le percentuali di rispondenti per genere. Esse mostrano i valori caratteristici della *segregazione* che si osservano dai dati amministrativi; ossia, il tasso di partecipazione non è influenzato dal genere, ammesso che la frequenza non ne sia influenzata. L'Annuario Statistico Italiano (Istat, 2002) relativo allo stesso anno accademico riporta valori simili: il 17,5% di donne è iscritto a un corso di laurea di Ingegneria, mentre il 12,4% di donne è iscritto a un corso di Diploma Universitario. A Economia, raggruppata con l'area statistica, si ha il 46,8% di donne iscritte a un corso di laurea e il 50,5% a un corso di Diploma Universitario. Rispetto al dato complessivo nazionale, all'Università di Modena e Reggio Emilia si iscrivono un po' meno donne, sia a Ingegneria sia a Economia.

Tabella 1 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) del corso frequentato dai rispondenti per facoltà*

Ingegneria			**Economia**		
Corso frequentato	n_i	%	**Corso frequentato**	n_i	%
Fisica tecnica	96	27,3	Econometria – Statistica 2	93	46,1
Calcolatori elettronici	109	31,0	Economia e gestione delle I.C.	77	38,1
Costruzioni di macchine	65	18,5	Marketing	32	15,8
Termofluidodinamica appl.	34	9,7			
Sistemi operativi	27	7,7			
Ingegneria del software	21	6,0			
Totale	**352**	**100,0**	**Totale**	**202**	**100,0**

Tabella 2 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) del genere per facoltà nel campione (n_i) e nell'Ateneo (N_i, iscritti in tutti gli anni di corso)*

Genere	**Ingegneria**				**Economia**			
	n_i	%	N_i	%	n_i	%	N_i	%
Uomo	308	87,5	1809	87,8	102	50,5	1449	54,7
Donna	44	12,5	252	12,2	100	49,5	1202	45,3
Totale	**352**	**100,0**	**2061**	**100,0**	**202**	**100,0**	**2651**	**100,0**

La Tabella 3 riporta la distribuzione dell'anno di nascita dei rispondenti e mostra una moda nel 1980 per Ingegneria e nel 1979 per Economia, quando ci si poteva

attendere il contrario per la diversa durata dei Corsi di Laurea delle due facoltà; ma a Economia vi è un'alta percentuale di studenti fuori corso (v. *infra*).

Tabella 3 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) dell'anno di nascita per facoltà*

Anno di nascita	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
<=1976	43	12,2	28	13,8
1977	36	10,2	27	13,3
1978	61	17,3	45	22,3
1979	62	17,6	70	34,7
>=1980	150	42,7	32	15,9
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

La Tabella 4 riporta la distribuzione del tipo di scuola media superiore di provenienza degli studenti, che mostra una certa analogia tra le due facoltà. A Ingegneria, le percentuali predominanti riguardano il Liceo Scientifico (61%) e l'Istituto Tecnico Industriale (24,4%). Il confronto con la distribuzione del titolo di studio degli iscritti alle due facoltà, che include anche quelli dei primi due anni, mostra che gli studenti del campione provenienti dal liceo scientifico sono molto piú numerosi degli iscritti ufficiali alla facoltà appartenenti alla stessa modalità. Qualche dato di riferimento, sebbene non interamente paragonabile perché riferito agli immatricolati dell'anno accademico 1997/98, si trova nelle statistiche dell'Istruzione dell'Istat (2000). A livello nazionale, nella facoltà di Ingegneria, il 48,8% degli immatricolati proviene dal Liceo Scientifico (che è la maggioranza relativa degli iscritti), il 38,8% proviene dagli istituti tecnici, e il 6,4% proviene dal Liceo Classico; ma nell'Ateneo di Modena e Reggio Emilia quest'ultima percentuale si dimezza, mentre le altre possono considerarsi simili. Sempre a livello nazionale, nella facoltà di Economia, il 33,1% degli immatricolati proviene dal Liceo Scientifico (che è ancora la maggioranza relativa degli iscritti), il 49,7% proviene dagli istituti tecnici, e il 7,5% proviene dal Liceo Classico; ma nell'Ateneo di Modena e Reggio Emilia quest'ultima percentuale è ancora circa la metà, e la percentuale di studenti provenienti dal Liceo Scientifico è un po' piú alta. L'interpretazione non è né semplice né univoca. Per i liceali (dello scientifico) può essere che siano meno soggetti alla selezione (dispersione) scolastica dei primi due anni, partecipino piú attivamente al test perché si sentono piú sicuri nella materia (oppure piú portati), frequentino piú assiduamente e lavorino meno. Il viceversa può valere per gli studenti provenienti dall'Istituto Tecnico Industriale (a Ingegneria) o Commerciale (a Economia): abbandonano più facilmente gli studi; partecipano meno al test perché meno preparati; frequentano meno assiduamente le lezioni e magari lavorano. Occorrono, quindi, altre informazioni che attualmente non sono disponibili.

La Tabella 5 riporta le distribuzioni del voto conseguito dagli studenti all'esame di maturità, espresso in sessantesimi e suddiviso in classi (fasce), per facoltà. A Ingegneria, il voto medio è 53,0 (con una deviazione standard 6,5) su 337 casi. Il 73,9% dei rispondenti (alla domanda) ha ottenuto una votazione non inferiore a 49/60 e ben il 46% degli studenti ha ottenuto una votazione superiore a 55/60; ne consegue che la maggior parte di coloro che si iscrivono a Ingegneria ha avuto buoni risultati nel corso della scuola media superiore e per questo riescono a sostenere il notevole impegno che richiede quel tipo di studio. A Economia, invece, il voto medio è 49,7 (con una

deviazione standard 6,9) su 197 casi. Il 55,8% del totale (dei rispondenti) ha ottenuto un voto non inferiore a 49/60; mentre solo il 28,5% degli studenti ha ottenuto una votazione superiore a 55/60. Le due distribuzioni sono statisticamente diverse al livello di significatività dell'1‰, applicando il test di Kolmogorov-Smirnov (Siegel, Castellan, 1988; Landenna, Marasini, 1990).

Tabella 4 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) del tipo di scuola secondaria frequentata per facoltà nel campione (n_i) e nell'Ateneo (N_i)*

Tipo di scuola	**Ingegneria**				**Economia**			
Frequentata	n_i	%	N_i	%	n_i	%	N_i	%
Liceo Classico	16	4,5	79	3,8	22	10,9	130	4,9
Liceo Scientifico	215	61,1	1016	49,3	97	48,0	1063	40,1
ITI/ITC[(a)]	86	24,4	690	33,5	64	31,7	966	36,4
Altri	35	9,9	276	13,4	19	9,4	492	18,6
Totale	**352**	**100,0**	**2061**	**100,0**	**202**	**100,0**	**2651**	**100,0**

[(a)] ITI per la facoltà di Ingegneria e ITC per la facoltà di Economia

Tabella 5 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) del voto di maturità (VdM), riportato a sessanta e suddiviso in classi, per facoltà*

Voto di maturità	**Ingegneria**		**Economia**	
in classi	n_i	%	n_i	%
36-42	27	7,7	34	16,8
43-48	61	17,3	53	26,2
49-54	94	26,7	53	26,2
55-60	155	44,0	57	28,2
Totale risposte	**337**	**95,7**	**197**	**97,5**
Mancanti	15	4,3	5	2,5
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

La Tabella 6 riporta le distribuzioni del corso di laurea per facoltà. Tra i frequentanti, che hanno partecipato al test, c'è una preponderanza degli iscritti al corso di Ingegneria Meccanica (50% circa); seguono il ramo di Ingegneria Informatica (32% circa) e quello di Ingegneria Elettronica (12,5%); infine, solo il 5,5% è iscritto a Ingegneria dei Materiali; mentre nella facoltà di Economia oltre il 50% è iscritto a Economia Aziendale. La distribuzione del corso di laurea è diversa (statisticamente) dalla distribuzione degli iscritti ($\chi^2_{6;oss} = 77{,}3$; p<0,001). Le differenze maggiori tra le frequenze osservate e quelle attese —calcolate in base alle proporzioni degli iscritti— si hanno: in Ingegneria dei Materiali, dove la frequenza osservata è assai piú piccola di quella attesa; in Ingegneria Meccanica, dove è molto piú alta; in Economia Aziendale, dove è inferiore; e in Economia Politica, dove è superiore. Per quanto concerne la facoltà di Economia, l'autoselezione è un fattore che può spiegare le differenze: la scelta del corso di laurea in Economia Aziendale è privilegiata da studenti che presentano qualche difficoltà con le materie quantitative e, pertanto, hanno partecipato meno al test. L'eterogeneità del tasso di frequenza può essere un altro fattore esplicativo: alcuni corsi di laurea sono piú frequentati di altri. Ciò dipende spesso dalla difficoltà delle materie insegnate, ma questo influisce anche sul rendimento al test e, dunque, i risultati ottenuti

potrebbero essere distorti verso l'alto; ossia, si sono osservati esiti che sono migliori di quanto è la preparazione media degli studenti. Considerazioni analoghe possono valere anche per Ingegneria.

La Tabella 7 riporta la distribuzione di frequenza dell'anno di iscrizione suddivisa sempre per facoltà. Per Ingegneria, la percentuale più alta di rispondenti è tra gli iscritti al terzo anno: dal confronto con la Tabella 3, si può evincere che la maggior parte degli studenti, partecipanti al test, è in corso; mentre per Economia, la percentuale piú alta si osserva tra gli iscritti al quarto anno, che potrebbe indicare un anno di ritardo, dato che i corsi selezionati sono del terzo anno.

La Tabella 8 riporta la distribuzione della condizione lavorativa per facoltà. L'impegno a tempo pieno negli studi è elevato: a Ingegneria, piú del 60% degli studenti studia a tempo pieno, il 30% circa lavora solo saltuariamente; mentre a Economia la percentuale degli studenti a tempo pieno si abbassa al 52,5% e la percentuale di coloro che lavorano saltuariamente si alza al 34,7%.

Tabella 6 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) del Corso di Laurea (per facoltà) nel campione (n_i) e nell'Ateneo (N_i)*

Ingegneria					**Economia**				
Corso di Laurea	n_i	%	N_i	%	**Corso di Laurea**	n_i	%	N_i	%
I. dei Materiali	19	5,4	229	12,3	**E. Aziendale**	105	52,0	1588	64,7
I. Meccanica	174	49,4	643	34,6	**E. e Commercio**	67	33,2	721	29,4
I. Elettronica	43	12,2	296	15,9	**E. Politica**	30	14,9	144	5,9
I. Informatica	109	31,0	692	37,2					
Totale	**345**	**98,0**	**1860**	**100,0**	**Totale**	**202**	**100,0**	**2453**	**100,0**
Mancanti	7	2,0							
Iscritti al biennio			2						
DU I. Informatica			98		**DU Comm. Estero**			67	
DU I. Meccanica			111		**DU E. Amm. Impr.**			131	
Totale	**352**	**100,0**	**2061**		**Totale**	**202**	**100,0**	**2651**	

Tabella 7 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) dell'anno di iscrizione per facoltà nel campione (n_i) e nell'Ateneo (N_i)*

Anno di iscrizione	**Ingegneria**				**Economia**			
	n_i	%	N_i	%	n_i	%	N_i	%
Primo			392	19,0			385	14,5
Secondo	1	0,3	394	19,1			359	13,5
Terzo	188	53,3	339	16,5	38	18,8	390	14,7
Quarto	59	16,8	262	12,7	84	41,6	318	12,0
Quinto	66	18,8	232	11,3				
I F.C.	17	4,8	8	0,4	47	23,3		
II F.C.	5	1,4	21	1,0	20	9,9	2	0,1
III e piú F.C.	14	4,0	413	20,0	13	6,4	1197	45,2
Totale	**350**	**99,4**	**2061**	**100,0**	**202**	**100,0**	**2651**	**100,0**
Mancanti	2	0,6						
Totale	**352**	**100,0**			**202**	**100,0**		

Tabella 8 – *Distribuzione delle frequenze assolute (n_i) e percentuali (%) della condizione lavorativa per facoltà*

Condizione lavorativa	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
Non lavora	214	60,8	106	52,5
Lavora saltuariamente	103	29,3	70	34,7
Lavora a tempo parziale	25	7,1	21	10,4
Lavora a tempo pieno	3	0,9	5	2,5
Totale	**345**	**98,0**	**202**	**100,0**
Mancanti	7	2,0		
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Il numero totale di esami sostenuti è stato rappresentato nella Tabella 9 con un diagramma «fusto-e-foglie» (*stem-and-leaf*) che evidenzia l'insieme dei dati rilevati. La maggior parte degli studenti ha sostenuto dagli 8 agli 11 esami a Ingegneria; infatti, la maggior parte dei rispondenti è iscritta al terzo anno di corso (si vedano la Tabella 3 e la Tabella 7). A Economia la distribuzione è, invece, un po' piú dispersa e spostata verso l'alto; infatti, il coefficiente di variazione è pari a 0,24 contro 0,44 di Ingegneria, ma la maggior parte degli studenti è iscritta al quarto anno. Le due distribuzioni sono statisticamente diverse al livello di significatività dell'1‰ (test di Kolmogorov-Smirnov); infatti, a Ingegneria la media degli esami sostenuti è 13,1 (deviazione standard 5,7) su 341 casi, mentre a Economia la media è 16,9 (deviazione standard 4,1) su 199 casi. Ne consegue che vi è una eterogeneità significativa tra le due facoltà perché le due deviazioni standard sono statisticamente diverse ($F_{340;198} = 41{,}17$; $p<0{,}001$) e anche le due medie sono statisticamente diverse tra loro ($t_{516,3} = -9{,}08$; $p<0{,}001$) con uno scarto di 3,83 esami a favore di Economia.

Tabella 9 – *Diagramma fusto-e-foglie* (stem&leaf) *del numero totale di esami sostenuti per facoltà con frequenze assolute (n_i)*

n_i		**Ingegneria**	n_i		**Economia**
1	0.	3			
8	0.	4455			
35	0.	66667777777777777	1	0.	7
76	0.	88888888888888888999999999999999999999	4	0.	899
66	1.	000000000000000000011111111111111	18	1.	000001111 1
17	1.	222222333	24	1.	2222333333333
29	1.	44444444555555 5	29	1.	444444555555555
17	1.	666667777	25	1.	6666666777777
22	1.	88888899999	34	1.	8888888888999999 9
31	2.	0000000001111111	32	2.	00000000000111111
21	2.	22233333333	26	2.	2222222223333
12	2.	444445	5	2.	444
5	2.	667	1	2.	6
0	2.				
1	3.	0			
		Stem width: 10 / Each leaf: 2 case(s)[a]			***Idem***

[a] La cifra sottolineata e evidenziata (in scuro) indica un solo caso

Nella Tabella 10 sono riportate le distribuzioni dei voti conseguiti agli esami di matematica, nella facoltà di Ingegneria. Analisi Matematica 1 (con media pari a 23,6 e deviazione standard pari a 3,2) mostra una lieve prevalenza dei voti intermedi (24 e 25), che raggiungono insieme circa il 25% del totale; la quota di studenti con voti inferiori a 21 è circa il 25% e il 20% presenta voti superiori a 26. Analisi Matematica 2 (con media pari a 24 e deviazione standard pari a 3,2) mostra ancora una prevalenza di voti intermedi (35% circa). Le due distribuzioni di voti non differiscono tra loro: il test di Kolmogorov-Smirnov non è significativo; quindi, anche le due medie non sono diverse tra loro (test *t* di Student per gruppi dipendenti, $t_{222} = -0{,}67$). La correlazione tra i due voti è significativa ($r = 0{,}34$; p<0,001), ma relativamente bassa. Il corso di Metodi Matematici mostra una netta prevalenza di voti alti; infatti, il 60% di essi appartiene alla *fascia* che va dal 28 al 30, ma è un esame sostenuto da pochi studenti. Coloro che sostengono anche l'esame di Metodi Matematici conseguono un netto miglioramento: sia del voto ottenuto a Analisi Matematica 1, in media 4,2 punti in piú ($t_{49} = -8{,}15$; *p*<0,001); sia del voto di Analisi Matematica 2, in media 3,2 punti in piú ($t_{49} = -7{,}55$; *p*<0,001). La distribuzione dei voti non è uniforme, come si desume anche dalla osservazione delle frequenze.

Nella Tabella 11 sono riportate le distribuzioni dei voti conseguiti agli esami di matematica, nella facoltà di Economia. Si riscontra un andamento assai simile a quello di Ingegneria, con un lieve aumento dei voti alti e una diminuzione dei voti bassi in Matematica Generale, che è il «corrispondente» di Analisi Matematica 1. La distribuzione dei voti di Matematica Finanziaria 1, che è il «corrispondente» di Analisi Matematica 2, presenta una frequenza relativamente alta a 18. Le due distribuzioni di voti differiscono tra loro: il test di Kolmogorov-Smirnov è significativo al 5‰; quindi, anche le due medie sono diverse tra loro (test *t* di Student per gruppi dipendenti, $t_{183} = 2{,}78$ e $p < 0{,}006$) con uno scarto di 0,9 punti. La correlazione tra i due voti è significativa ($r = 0{,}30$; p<0,001), ma sempre piuttosto bassa. Le due distribuzioni non sono tra loro uguali o uniformi. Il confronto con la facoltà di Ingegneria mostra che le differenze tra le medie degli esami di matematica (corrispondenti tra loro) non sono elevate: la media di Analisi Matematica 1 presenta la differenza di 1 punto (circa) rispetto a Matematica Generale a favore di Economia ($t_{538} = -3{,}14$ e $p < 0{,}001$); mentre non c'è differenza significativa tra le medie di Analisi Matematica 2 e Matematica Finanziaria 1 ($t_{405} = 0{,}43$ e $p < 0{,}173$), anche se a Economia vi è una maggiore variabilità. Si può cosí arguire che la forte attrazione delle due facoltà, per la varietà degli sbocchi professionali offerti, richiama molti studenti e non genera preliminarmente una selezione sulle competenze di matematica. Si potrebbe pensare, infatti, che a Ingegneria si iscrivano studenti con una spiccata tendenza per le materie quantitative, mentre ciò non accade a Economia. In realtà, la differenza in parte c'è, come mostra il voto di maturità, che è piú alto a Ingegneria. Il test preparato ha considerato questa differenza, come il diverso contenuto dei programmi svolti nelle due facoltà, anche se le nozioni richieste erano elementari.

La Tabella 12 riporta la distribuzione del voto medio, suddiviso in classi, per facoltà. Le percentuali tra le varie classi sembra simile nelle due facoltà. Il voto medio relativo agli esami sostenuti nella facoltà di Ingegneria presenta una media di 25,0 (con una deviazione standard pari a 2,0) su 307 casi; mentre a Economia presenta una media di 24,8 (con una deviazione standard pari a 2,0) su 198: le due distribuzioni sono simili

(il test di Kolmogorov-Smirnov non è significativo, $p < 0{,}372$), come pure le medie ($t_{503} = 1{,}21$ e $p < 0{,}227$).

Tabella 10 – *Distribuzione delle frequenze (assolute, percentuali, e cumulate), con media ($\bar{x}$) e deviazione standard (s), del voto di Analisi Matematica 1, Analisi Matematica 2, e Metodi Matematici per la facoltà di Ingegneria*

Voto	**Analisi Matematica 1**			**Analisi Matematica 2**			**Metodi Matematici**		
	n_i	% Val.	F_i (%)	n_i	% Val.	F_i (%)	n_i	% Val.	F_i (%)
18	18	5,3	5,3	11	4,9	4,9			
19	41	12,1	17,4	16	7,2	12,1	1	2,0	2,0
20	28	8,3	25,7	10	4,5	16,6			
21	19	5,6	31,3	16	7,2	23,8			
22	16	4,7	36,0	14	6,3	30,0			
23	30	8,8	44,8	24	10,8	40,8	4	8,0	10,0
24	39	11,5	56,3	32	14,3	55,2	3	6,0	16,0
25	44	13,0	69,3	23	10,3	65,5	2	4,0	20,0
26	33	9,7	79,1	23	10,3	75,8	3	6,0	26,0
27	29	8,6	87,6	18	8,1	83,9	6	12,0	38,0
28	13	3,8	91,4	23	10,3	94,2	5	10,0	48,0
30	29	8,6	100,0	13	5,8	100,0	26	52,0	100,0
Totale	**339**	**100,0**		**223**	**100,0**		**50**	**100,0**	
Mancanti	13	$\bar{x}$ =	s =	129	$\bar{x}$ =	s =	302	$\bar{x}$ =	s =
Totale	**352**	**23,6**	**3,5**	**352**	**24,0**	**3,2**	**352**	**27,9**	**2,7**

Tabella 11 – *Distribuzione delle frequenze (assolute, percentuali, e cumulate) , con media ($\bar{x}$) e deviazione standard (s), del voto di Matematica Generale e Matematica Finanziaria 1, per la facoltà di Economia*

Voto	**Matematica Generale**			**Matematica Finanziaria 1**		
	n_i	% Val.	F_i (%)	n_i	% Val.	F_i (%)
18	13	6,5	6,5	20	10,9	10,9
19	10	5,0	11,4	13	7,1	17,9
20	7	3,5	14,9	12	6,5	24,5
21	11	5,5	20,4	15	8,2	32,6
22	10	5,0	25,4	15	8,2	40,8
23	16	8,0	33,3	10	5,4	46,2
24	30	14,9	48,3	20	10,9	57,1
25	23	11,4	59,7	12	6,5	63,6
26	14	7,0	66,7	10	5,4	69,0
27	16	8,0	74,6	12	6,5	75,5
28	21	10,4	85,1	19	10,3	85,9
29	2	1,0	86,1	2	1,1	87,0
30	28	13,9	100,0	24	13,0	100,0
Totale	**202**	**100,0**		**184**	**100,0**	
Mancanti	1			18		
Totale	**202**	$\bar{x}$	s	**202**	$\bar{x}$	s =**3,9**

Le motivazioni dell'eventuale non risposta a qualche quesito (Tabella 13) sono espresse dal 41,5% a Ingegneria e del 49,5% a Economia con distribuzioni assai simili

tra le modalità: il 41,1% a Ingegneria e il 48% a Economia, di coloro che hanno risposto, ha dichiarato di non essere a conoscenza dell'argomento, il che denota che lo studente lo ha completamente dimenticato, dato che è stato oggetto di studio nel biennio.

Tabella 12 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali) del voto medio in classi per facoltà*

Voto medio in classi	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
18-21	12	3,4	7	3,5
21-24	102	29,0	77	38,1
24-27	147	41,8	87	43,1
27-30	46	13,1	27	13,4
Totale	**307**	**87,2**	**198**	**98,0**
Mancanti	45	12,8	4	2,0
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

La Tabella 14 riporta la distribuzione dei tre questionari somministrati agli studenti; come da protocollo, si sono ottenute distribuzioni omogenee, con una lieve prevalenza del questionario 2, che presenta una percentuale del 34,1% rispetto al 33% degli altri due.

Tabella 13 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali) del motivo di non risposta ai quesiti per facoltà*

Motivo di non risposta a domande del test	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
Mancanza di tempo	29	8,2	18	8,9
Argomento non conosciuto	60	17,1	48	23,8
Altro	56	15,9	32	15,8
Mancanza tempo/Argomento non noto	1	0,3	2	1,0
Totale	**146**	**41,5**	**100**	**49,5**
Mancanti	206	58,5	102	50,5
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Tabella 14 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali) del tipo di questionario per facoltà*

Tipo di questionario	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
Questionario 1	116	33,0	68	33,7
Questionario 2	120	34,1	67	33,2
Questionario 3	116	33,0	67	33,2
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

3.2. Le facoltà rispetto agli esiti del test di matematica

Il punteggio conseguito al test è la variabile di interesse dell'indagine perché consente di analizzare la prestazione degli studenti rispetto ai contenuti indagati. La Tabella 15 mostra che a Ingegneria circa il 70% di essi ha risposto esattamente a piú della metà del questionario e che ben il 40% ha ottenuto un punteggio alto, compreso tra 9 e 12; infatti, la media è pari a 7,8 con una deviazione standard uguale a 2,3. A Economia circa l'88% ha risposto erroneamente a piú della metà del questionario, una sola persona ha risposto correttamente a 11 domande, e nessuno ha svolto correttamente l'intero test; infatti, la media è 3,5 con una deviazione standard uguale a 2,3. Da questo si può dedurre che la preparazione in matematica degli studenti di Ingegneria è buona, confrontata con quelli di Economia, ma c'è da riflettere se si considera la semplicità delle nozioni richieste; per gli studenti di Economia, seppure sia nota la loro idiosincrasia per la matematica, il risultato conseguito è preoccupante.

Logaritmi. La Tabella 16 riporta la distribuzione delle risposte date dagli studenti alla domanda relativa ai logaritmi. A Ingegneria la stragrande maggioranza ha risposto esattamente; infatti, 327 studenti su un totale di 352 ha ottenuto la modalità 5 che indica la risposta corretta; mentre a Economia solo il 51% ha risposto correttamente e vale, quindi, il solito *caveat*.

Potenze e disequazioni. La Tabella 17 e la Tabella 18 mostrano che anche per quanto riguarda le domande relative alle potenze e alle disequazioni, gran parte degli studenti della facoltà di Ingegneria ha risposto correttamente (80% circa) evidenziando una buona preparazione anche su questi due argomenti. A Economia, invece, le potenze sono note alla stessa stregua degli integrali, mentre le disequazioni risultano piú difficili, rivelando quanto siano persistenti le lacune di base, dato che queste nozioni sono nei programmi di molte scuole superiori.

Tabella 15 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali) del punteggio conseguito per facoltà*

Punteggio	**Ingegneria**		**Economia**	
Conseguito	n_i	%	n_i	%
0	2	0,6	8	4,0
1	2	0,6	22	10,9
2	5	1,4	35	17,3
3	9	2,6	39	19,3
4	11	3,1	43	21,3
5	26	7,4	30	14,9
6	39	11,1	11	5,4
7	51	14,5	8	4,0
8	57	16,2	5	2,5
9	56	15,9		
10	55	15,6		
11	29	8,2	1	0,5
12	10	2,8		
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**
	$\bar{x}$ **=7,82**	s **=2,35**	$\bar{x}$ **=4,49**	s **=1,90**

Tabella 16 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa ai logaritmi*: per a>0, $\log_a(a^5)$

Logaritmi	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR[(a)]	5	1,4	13	6,4
1	2	0,6	19	9,4
2	9	2,6	27	13,4
3	3	0,9	20	9,9
4	6	1,7	20	9,9
5 – RC	327	92,9	103	51,0
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

[(a)] NR: non risposto / RC: risposta corretta

Tabella 17 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alle potenze*: $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x}$

Potenze	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – N.R.	3	0,9	9	4,5
1	17	4,8	18	8,9
2	17	4,8	11	5,4
3	14	4,0	18	8,9
4	9	2,6	42	20,8
5 – R.C.	292	83,0	104	51,5
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Tabella 18 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alle disequazioni*: $\frac{x+2}{x-1} > 0$

Disequazioni	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	4	1,1	13	6,4
1	12	3,4	20	9,9
2	18	5,1	40	19,8
3	14	4,0	32	15,8
4	29	8,2	27	13,4
5 – RC	275	78,1	70	34,7
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Monotonia. La Tabella 19 mostra l'esistenza di una risposta attrattrice; infatti, ben 172 studenti hanno selezionato la risposta «è sempre crescente», mentre per la funzione presente nel test la risposta corretta (scelta solo da 144 studenti) era: «è crescente per x > 0». L'aver scelto tale risposta attrattrice, però, non costituisce un segnale di impreparazione, in quanto si tratta più che altro di una imprecisione, di un errore di distrazione che, se per un matematico può essere grave, non lo è sicuramente altrettanto per uno studente, sia di Ingegneria, sia di Economia: una precisazione che può sfuggire perché si dà per scontata, anche se scontata non è.

Funzioni di una variabile. La tabella 20 mostra che alla prima domanda relativa alle funzioni di una variabile (a), circa il 50% degli studenti di Ingegneria ha risposto esattamente, mentre il 30% non ha risposto, dimostrando di avere dimenticato l'argomento. A Economia, la situazione è piú preoccupante: solo il 20% risponde correttamente. La seconda domanda relativa alla funzione di una variabile (b) mostra l'esistenza di una risposta lievemente attrattrice, specie a Economia (Tabella 21). La risposta corretta era: «la funzione data si annulla almeno una volta in [1,3]», ma il 13,4% a Ingegneria e il 26,7% a Economia hanno risposto che la funzione «può non annullarsi mai in [1,3]». A Ingegneria il risultato è meno preoccupante in quanto quasi il 60% degli studenti ha risposto esattamente e l'attrazione potrebbe derivare da una risposta intuitiva, data senza controllare o verificare. A Economia, invece, il risultato è preoccupante, ma coerente con l'andamento generale delle risposte fornite anche in altri quesiti.

Serie. La Tabella 22 evidenzia una situazione analoga alla precedente per quanto riguarda le serie numeriche. Anche in questo caso si individua, infatti, una risposta attrattrice che ha portato all'errore il 21,6% degli studenti a Ingegneria. A Economia le risposte sembrano date a caso perché tutte le modalità presentano una percentuale simile. La risposta esatta a tale domanda era: «la serie geometrica converge a 3/2», ma, a Ingegneria, 96 studenti (dato non desumibile dalla Tabella 22) hanno risposto erroneamente: «nessuna delle risposte date è corretta».

Tabella 19 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alla monotonia*: $g(x)=\ln(x^2+1)$

Monotonia	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	8	2,3	13	6,4
1	119	33,8	98	48,5
2	6	1,7	6	3,0
3	21	6,0	7	3,5
4	54	15,3	38	18,8
5 – RC	144	40,9	40	19,8
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Tabella 20 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alle funzioni di una variabile (a)*: scelta di x medio

Funzione di una variabile (a)	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	104	29,5	90	44,6
1	21	6,0	2	1,0
2	20	5,7	24	11,9
3	17	4,8	31	15,3
4	6	1,7	13	6,4
5 – RC	182	51,7	42	20,8
6	2	0,6		
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Tabella 21 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alle funzioni di una variabile (b)*: $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 3$

Funzione di una variabile (b)	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	47	13,4	68	33,7
1	47	13,4	54	26,7
2	25	7,1	20	9,9
3	25	7,1	18	8,9
4	4	1,1	7	3,5
5 – RC	204	58,0	35	17,3
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Integrali. La prima domanda relativa agli integrali (a) presenta una risposta lievemente attrattrice. A Ingegneria, il 21% degli studenti ha risposto che, in riferimento alla funzione data, «non esiste alcuna primitiva di f che passa per P», mentre la risposta corretta era esattamente l'opposto: «esiste una primitiva di f che passa per P». Se a questo sommiamo che ben il 41,5% degli studenti non ha risposto, e che solo il 21,6% ha risposto correttamente, si può dedurre che la domanda o l'argomento non sono stati capiti o (Tabella 23). Questo esercizio non richiede alcun tipo di calcolo, ma vuole verificare quanto gli studenti ricordano di una proprietà «teorica», fondamentale per la comprensione dell'argomento. Se della teoria degli integrali lo studente si è impossessato solo della tecnica di calcolo, cercherà di calcolare l'integrale indefinito e, successivamente, imporrà il passaggio per il punto. Ciò comporta il ricordarsi mnemonicamente le tecniche anche dopo un certo periodo e tempi lunghi per arrivare alla soluzione; nel caso specifico, tra l'altro, non era possibile calcolare elementarmente la primitiva. A Economia si osserva il solito andamento delle risposte. La Tabella 24 mostra che ben il 95,7% degli studenti ha risposto esattamente alla seconda domanda relativa agli integrali (b), segno che, dal punto di vista della risoluzione pratica, l'argomento è stato pienamente appreso dalla stragrande maggioranza di essi. A Economia si torna ai livelli dei logaritmi e delle potenze perché anche qui la parte operativa con funzioni semplici è ben assimilata.

Tabella 22 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alle serie*: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

Funzione di una variabile (b)	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	38	10,8	47	23,3
1	41	11,6	42	20,8
2				
3	76	21,6	40	19,8
4	20	5,7	37	18,3
5 – RC	177	50,3	36	17,8
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Funzioni di due variabili. La prima domanda relativa alle funzioni di due variabili (Tabella 25) mostra una distribuzione simile alle domande di difficoltà media a Ingegneria, dove ha risposto esattamente circa il 72% degli studenti; mentre a Economia

si torna ai livelli delle domande difficili, anche se le funzioni a due variabili non sono molto approfondite nei corsi e, quindi, la diminuzione del tasso di risposta è nella «norma». La Tabella 26 indica che, per quanto riguarda la seconda domanda relativa alle funzioni di due variabili (b), il 60% degli studenti ha risposto correttamente, mentre il 18% non ha risposto affatto. A Economia, l'andamento delle risposte è immutato rispetto al caso precedente perché permangono le stesse ragioni.

Tabella 23 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa agli integrali (a)*: P(–1,1) e $f(x) = e^{\sin^2(x)} + 1$

Integrale (a)	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	146	41,5	64	31,7
1	3	0,9	13	6,4
2	47	13,4	36	17,8
3	56	15,9	38	18,8
4	24	6,8	25	12,4
5 – RC	76	21,6	26	12,9
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Tabella 24 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa agli integrali (b)*: $\int_{-1}^{1} 5x^5 dx$

Integrale (b)	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	10	2,8	42	20,8
1	1	0,3	19	9,4
2	3	0,9	18	8,9
3			13	6,4
4	1	0,3	10	5,0
5 – RC	337	95,7	100	49,5
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Tabella 25 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alle funzioni di due variabili (a)*: $g(x, y) = \frac{y^2}{x} - e^y + \ln(y)$

Funzione di due variabili (a)	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	47	13,4	58	28,7
1	8	2,3	27	13,4
2	17	4,8	21	15,3
3	6	1,7	10	5,0
4	21	6,0	40	19,8
5 – RC	253	71,9	36	17,8
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Sistemi lineari. La Tabella 27 mostra i punteggi ottenuti dagli studenti nella domanda relativa ai sistemi lineari. Una risposta lievemente attrattrice («il sistema è impossibile») è stata scelta da 43 studenti di Ingegneria e 64 studenti di Economia. La percentuale di risposte corrette è il 77% a Ingegneria, e solo il 38,6% a Economia.

Punteggio complessivo. La Tabella 28 riporta le domande ordinate, in senso decrescente, secondo la percentuale di risposte corrette. A Ingegneria, i logaritmi, le potenze, le disequazioni, e i sistemi lineari ricevono un elevato tasso di risposte corrette; ciò vale anche per il calcolo di integrali definiti di funzioni relativamente semplici, mentre domande un po' piú teoriche sugli integrali sono risultate difficili. La percentuale si abbassa per le serie e la monotonia. A Economia, si ha un andamento simile, ma con una percentuale di risposte corrette molto piú bassa.

Tabella 26 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali), per facoltà, della domanda relativa alle funzioni di due variabili (b)*: $g(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2$

Funzione di due variabili (b)	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	63	17,9	60	29,7
1	20	5,7	33	16,3
2	27	7,7	27	13,4
3	11	3,1	29	14,4
4	16	4,5	19	9,4
5 – RC	215	61,1	34	16,8
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Tabella 27 – *Distribuzione delle frequenze (assolute e percentuali) della domanda relativa ai sistemi lineari per facoltà*

Sistemi lineari	**Ingegneria**		**Economia**	
	n_i	%	n_i	%
0 – NR	6	1,7	17	8,4
1	18	5,1	28	13,9
2	19	5,4	23	11,4
3	19	5,4	25	12,4
4	19	5,4	31	15,3
5 – RC	271	77,0	78	38,6
Totale	**352**	**100,0**	**202**	**100,0**

Gli argomenti inclusi nel test possono essere ordinati gerarchicamente secondo un criterio propedeutico o logico, ma i criterî che si adottano non sono sempre univoci e l'apprendimento può presentare incoerenze. Per esempio, si introducono prima le potenze e, poi, i logaritmi; pertanto, i due concetti sono sequenziali, ma un discente può trovarsi a suo agio piú con i logaritmi che con le potenze. In generale, l'ordinamento delle domande è possibile se si suppone che esse costituiscano gradi diversi di una stessa proprietà, che si dirà, pertanto, scalabile. La tentazione di supporre che le domande somministrate «misurino» la preparazione in matematica e che possano formare una scala è forte; ma, come si è detto, è presumibile che non vi sia una rigorosa gerarchia tra le domande in modo che, chi abbia risposto correttamente a una domanda in una certa posizione o rango (per esempio, la quinta domanda inerente ai sistemi

lineari per Ingegneria nella Tabella 28) abbia risposto correttamente anche alle domande che si collocano nei ranghi precedenti. Per accertare la scalabilità, si è calcolato il coefficiente di riproducibilità per uno scalogramma di Guttman e si è ottenuto un valore pari a 0,76. Esso esprime l'accuratezza con la quale si possono prevedere le risposte dei soggetti quando è noto il gruppo o la posizione in cui si collocano. Per assumere la scalabilità si richiede che il coefficiente di riproducibilità sia maggiore o uguale a 0,9; pertanto, si deve scartare la scalabilità. Nella facoltà di Ingegneria esso è pari a 0,82; ma rimane ancora basso rispetto alla soglia generalmente adottata. Per controllare la consistenza interna della «scala» costituita dalle domande si possono usare altri indicatori, ma il risultato conseguito sembra abbastanza robusto. Nella facoltà di Ingegneria, per esempio, si ottiene un coefficiente α (alfa di Chronbach) pari a 0,66 che è un po' basso, ma vicino alla soglia dei valori che in molte circostanze sono considerati accettabili e che varia tra 0,7 e 0,8 (Nunnally, Bernstein, 1994; Kaplan, Saccuzzo, 1997).

Tabella 28 – *Percentuali di risposte corrette alle varie domande del test (ordinate in senso decrescente) per facoltà*

Domande – Ingegneria	%	**Rango**	**Domande – Economia**	**%**
Integrali (b)	95,7	**1**	Potenze	51,5
Logaritmi	92,9	**2**	Logaritmi	51,0
Potenze	82,9	**3**	Integrali (b)	49,5
Disequazioni	78,1	**4**	Sistemi lineari	38,6
Sistemi lineari	77,0	**5**	Disequazioni	34,6
Funzione a due variabili (a)	71,9	**6**	Funzione a una variabile (a)	20,8
Funzione a due variabili (b)	61,1	**7**	Monotonia	19,8
Funzione a una variabile (b)	57,9	**8**	Funzione a due variabili (b)	17,8
Funzione a una variabile (a)	51,7	**9**	Serie (geometrica)	17,8
Serie (geometrica)	50,3	**10**	Funzione a una variabile (a)	17,3
Monotonia	40,9	**11**	Funzione a due variabili (b)	16,8
Integrale (a)	21,6	**12**	Integrale (a)	12,9

I caratteri qualitativi rilevati sono il genere, il tipo di maturità conseguita, il corso di laurea, e la condizione lavorativa. Le medie dei punteggi conseguiti al test possono differenziarsi tra le loro modalità. Per descrivere gli esiti del test nel campione di studenti che hanno partecipato all'indagine si riportano i valori medi, le deviazioni standard, e il numero dei casi per alcuni caratteri, singolarmente e incrociati tra loro.

Nella Tabella 29 si sono esposte le medie dei punteggi conseguiti al test per facoltà e *anno di iscrizione*, dove si può osservare una certa non linearità nell'andamento delle medie, sebbene all'aumentare degli anni vi sia una tendenza alla diminuzione del punteggio. A Ingegneria, all'aumentare degli anni di iscrizione il punteggio medio aumenta fino al quinto anno, poi diminuisce. A Economia, la media per anno di iscrizione oscilla: la piú bassa è nel terzo/quarto anno fuori corso.

Nella Tabella 30 si sono riportate le medie dei punteggi conseguiti al test per *genere*, per *tipo di diploma di maturità* (aggregando le modalità con frequenze basse), e per facoltà. Si può notare che le donne tendono a ottenere punteggi piú bassi degli uomini, sebbene nella fase di somministrazione del test si sia osservata una maggiore diligenza, applicazione, e disponibilità delle donne. Nella Tabella 31 si sono riportate, infine, le medie dei punteggi conseguiti al test secondo la condizione lavorativa. Le uniche differenze rilevanti si osservano per coloro che lavorano a tempo pieno, ma la loro frequenza è bassa.

Tabella 29 – *Media ($\bar{x}$), deviazione standard (s), e numero di casi (n) del punteggio conseguito al test per facoltà e per anno di iscrizione (AI)*

AI		II	III	IV	V	I F.C.	II F.C.	≥III F.C.	Totale
Ingegneria	$\bar{x}$	**5,0**	**7,8**	**7,9**	**8,2**	**8,1**	**6,4**	**6,9**	**7,8**
	s		2,3	2,2	2,3	2,4	3,7	2,9	2,3
	n	1	188	59	66	17	5	14	350
Economia	$\bar{x}$		**3,7**	**3,7**	**3,1**	**3,7**	**3,8**	**2,5**	**3,5**
	s		2,3	1,9	1,7	1,5	1,3	1,5	1,9
	n		38	84	47	20	5	8	202

Tabella 30 – *Media ($\bar{x}$), deviazione standard (s), e numero di casi (n) del punteggio conseguito al test per genere, per tipo di diploma di maturità, e per facoltà*

	Ingegneria					Economia				
Diploma	**L. Cl.**	**L. Sc.**	**ITI**	**Altro**	**Tot.**	**L. Cl.**	**L. Sc.**	**ITC**	**Altro**	**Tot.**
Uomo - $\bar{x}$	**6,9**	**8,1**	**7,7**	**7,5**	**7,9**	**3,1**	**4,2**	**2,8**	**3,1**	**3,6**
s	2,8	2,3	2,0	2,8	2,3	1,6	2,3	1,9	1,6	2,1
n	14	184	82	28	308	7	53	28	14	102
Donna - $\bar{x}$	**7,5**	**7,8**	**6,0**	**4,6**	**7,1**	**3,7**	**3,8**	**2,9**	**2,4**	**3,4**
s	2,1	2,0	1,4	3,2	2,4	1,7	1,5	1,8	0,5	1,7
n	2	31	4	7	44	15	44	36	5	100

Tabella 31 – *Media ($\bar{x}$), deviazione standard (s), e numero di casi (n) del punteggio conseguito al test per condizione lavorativa e per facoltà*

Condizione	Ingegneria					Economia				
Lavorativa	**No**	**Salt.**	**T. p.e**	**T. p.o**	**Tot.**	**No**	**Salt.**	**T. p.e**	**T. p.o**	**Tot.**
$\bar{x}$	**8,1**	**7,4**	**8,0**	**4,7**	**7,8**	**3,6**	**3,5**	**3,3**	**2,2**	**3,5**
s	2,3	2,4	2,3	4,2	2,4	2,0	1,7	2,0	1,5	1,9
n	215	102	25	3	345	106	70	21	5	202

Nella Tabella 32 si riportano le medie dei punteggi conseguiti per corso di laurea e per facoltà. A Ingegneria, la migliore prestazione la ottengono gli studenti del corso di laurea in Ingegneria dei Materiali, mentre la piú bassa si osserva a Ingegneria Elettronica. A Economia, i risultati migliori li ottengono gli studenti del corso di laurea in Economia e Commercio, mentre gli studenti del corso di laurea in Economia Aziendale conseguono punteggi piú bassi in media. Gli esiti ottenuti sembrano coerenti con il luogo comune che in Economia Aziendale vi sia un'affluenza di persone meno interessate alla matematica. Anche a Ingegneria pare vi sia una tendenza verso i livelli piú bassi di prestazione in matematica nel corso di laurea in Ingegneria Elettronica, sebbene il livello della preparazione sia sempre alto e la tesi assai controversa.

Tabella 32 – *Media ($\bar{x}$), deviazione standard (s), e numero di casi (n) del punteggio conseguito al test per corso di laurea e per facoltà*

Ingegneria				**Economia**			
Corso di Laurea	$\bar{x}$	s	n	**Corso di Laurea**	$\bar{x}$	s	n
I. dei Materiali	8,2	2,0	19	**E. Aziendale**	3,1	1,5	105
I. Meccanica	8,0	2,3	174	**E. e Commercio**	4,0	2,2	67
I. Elettronica	7,4	2,2	43	**E. Politica**	3,7	2,2	30
I. Informatica	7,7	2,5	109				
Totale	**7,8**	**2,4**	**345**	**Totale**	**3,5**	**1,9**	**202**

La Tabella 33 riporta i punteggi medi conseguiti al test in base al numero di esami di matematica sostenuti e gli esisti mostrano che chi ha sostenuto un solo esame di matematica consegue punteggi piú bassi di chi ne ha sostenuti due, sia a Ingegneria e sia a Economia. Chi ha sostenuto un terzo esame di matematica non ha conseguito in media un punteggio piú alto (ossia un miglioramento), ma addirittura piú basso (ossia, un peggioramento). Si può evincere anche da questa tabella che oltre il 50% degli studenti della facoltà di Ingegneria è iscritta al terzo anno e, quindi, molti di loro non hanno ancora sostenuto il secondo esame di matematica. La situazione si capovolge nella facoltà di Economia, dove quasi tutti hanno già sostenuto il secondo esame di matematica, ma il numero di studenti fuori corso è piú elevato; infatti, il test è stato somministrato durante le lezioni di insegnamenti obbligatorî del terzo e del quarto anno, per cercare di raggiungere una platea piú vasta e aumentare il numero di partecipanti. Presumibilmente, si può avere introdotto, cosí, una lieve distorsione verso il basso perché gli studenti piú preparati sono stati meno coinvolti rispetto a quelli di Ingegneria; tuttavia, si noti che anche questo fenomeno esprime una caratterizzazione della differenza tra gli studenti delle due facoltà. Ingegneria è piú frequentata perché, diversamente, sarebbe piú difficile laurearsi e studiare con profitto. Gli studenti si applicano, quindi, con maggiore impegno e decisione per cercare di completare quanto prima gli studi e immettersi sul mercato del lavoro; ma lo studio è oneroso e si accumula, perciò, un certo ritardo nel conseguimento della laurea. Economia è tendenzialmente meno frequentata e vi è un numero maggiore di studenti che lavorano, sia a tempo pieno, sia a tempo parziale, sia saltuariamente (si veda la Tabella 8); pertanto, il ritardo nel conseguimento del titolo si accumula non soltanto per la difficoltà degli studi, ma anche per il diverso atteggiamento o la diversa disponibilità che gli studenti hanno per lo studio.

Tabella 33 – *Media ($\bar{x}$), deviazione standard (s), e numero di casi (n) del punteggio conseguito al test per numero di esami di matematica sostenuti (NEM) e per facoltà*

NEM	**Esami Matematica**	$\bar{x}$	s	n	**Esami Matematica**	$\bar{x}$	s	n
0	**Non risposta**	5,2	2,0	13	**Non risposta**	4,0		1
1	**Analisi Matematica 1**	7,3	2,0	116	**Matematica Generale**	2,8	2,0	17
2	**+ Analisi Matematica 2**	8,4	2,2	173	**+ Matematica Finanziaria 1**	3,5	1,9	184
3	**+ Metodi Matematici**	7,9	2,8	50				
	Totale	**7,8**	**2,3**	**352**	**Totale**	**3,5**	**1,9**	**202**

L'analisi descrittiva sinora eseguita ha mostrato le molteplici differenze tra gli studenti delle due facoltà. La prestazione degli studenti di Ingegneria è certamente migliore di quella degli studenti di Economia e solo il 3% di questi ultimi consegue un punteggio che supera appena il 41,3% degli studenti di Ingegneria (si veda la Tabella 15). Il risultato non è sorprendente, in un senso, perché era ovvio che gli studenti di Ingegneria fossero piú preparati di quelli di Economia. Nell'altro senso, se si considerano le difficoltà degli esercizi proposti, allora è sorprendente che solo il 41,3% degli studenti di Ingegneria abbia risposto correttamente al massimo a sette domande su dodici: appena la sufficienza. È vero che il test è stato somministrato a sorpresa e, quindi, gli esaminandi non hanno eseguito alcuna una preparazione né specifica, né psicologica; ma uno degli scopi del test era proprio accertare «quel che è rimasto dello studio» della matematica.

3.3. Determinanti degli esiti del test di matematica

Le tendenze o le differenze osservate nei punteggi conseguiti al test somministrato, e sopra riportati, devono essere valutate considerando i caratteri nel loro insieme, ossia simultaneamente, tenendo conto anche di altre informazioni, come il voto di maturità, il voto medio conseguito agli esami di matematica, e cosí via. La variabile di maggiore interesse è «il tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica» (TTEM) perché si asserisce spesso che, al suo aumentare, l'apprendimento tende a «logorarsi» e, quindi, a svanire. Per individuare quali e «dove» sono le differenze dei punteggi conseguiti al test occorre considerare che si hanno caratteri sia qualitativi (v. *supra*), sia quantitativi. Ciò determina il tipo di analisi che si può condurre: se ci si concentra sulla differenza tra le medie osservate per le modalità delle variabili qualitative, allora si eseguirà una analisi della covarianza (ANCOVA); diversamente, si utilizzerà un modello di regressione lineare per individuare i caratteri che influenzano gli esiti conseguiti dagli studenti partecipanti all'indagine svolta.

I caratteri quantitativi rilevati, che possono influenzare l'esito conseguito al test, sono: il voto del diploma di maturità (VDM), l'anno di iscrizione (AI), il numero di esami superati dall'immatricolazione al momento della somministrazione del test (NESI), il numero di esami di matematica sostenuti (NEM), il voto medio degli esami di matematica (VMEM), il tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica (TTEM), il voto medio relativo agli esami sinora sostenuti (VMES). La variabile NEM è discreta e assume i valori da 1 a 3: è importante per considerare simultaneamente tutti i rispondenti, ma nell'analisi può considerarsi anche «come» una variabile qualitativa. Il valore 0 corrisponde ai non rispondenti e sarà definito come mancante e, quindi, tali soggetti saranno esclusi dall'analisi. La variabile AI può rappresentare una *proxy* di altre, con le quali mostra correlazioni che sono tutte significative almeno all'1%: TTEM, NESI, NEM (si veda la Tabella 34). Inoltre, NEM è correlato con NESI e vi sono tre caratteri che esprimono la prestazione «media» dello studente nel tempo (VDM, VMEM, VMES) e sono tutte correlate tra loro. La struttura dei coefficienti di correlazione appare diversa tra Ingegneria e Economia: i valori sono in genere piú alti a Ingegneria, e talvolta anche i segni sono differenti. Le variabili che presentano un andamento diverso tra le due facoltà sono il punteggio conseguito e il voto del diploma di maturità. La prima, PC, è correlata con VDM, NEM, VMEM, e VMES a Ingegneria; mentre a Economia solo con VMEM e VMES. La seconda, VDM, è correlata solo con

VMEM e VMES a Ingegneria; mentre a Economia è correlata con tutte le variabili, eccetto NEM.

Tabella 34 – *Coefficienti di correlazione[(a)] tra il punteggio conseguito al test (PC) e altri caratteri «quantitativi» rilevati per facoltà*

Ingegneria	**PC**	**VDM**	**AI**	**NESI**	**NEM**	**VMEM**	**TTEM**	**VMES**
PC	1,000							
VDM	**0,309**	1,000						
AI	–0,023	–0,047	1,000					
NESI	0,054	0,030	**0,692**	1,000				
NEM	**0,220**	0,093	**0,485**	**0,641**	1,000			
VMEM	**0,229**	**0,371**	–0,007	0,087	**0,234**	1,000		
TTEM	–0,083	–0,028	**0,525**	**0,475**	0,120	–0,005	1,000	
VMES	**0,354**	**0,447**	**0,137**	**0,319**	**0,367**	**0,671**	0,059	1,000
Economia	**PC**	**VDM**	**AI**	**NESI**	**NEM**	**VMEM**	**TTEM**	**VMES**
PC	1,000							
VDM	***0,131***	1,000						
AI	–0,099	**–0,204**	1,000					
NESI	–0,057	**0,175**	**0,526**	1,000				
NEM	0,095	0,128	***0,134***	**0,306**	1,000			
VMEM	**0,278**	**0,319**	**–0,218**	0,004	0,091	1,000		
TTEM	–0,066	**–0,199**	**0,714**	**0,355**	–0,005	–0,107	1,000	
VMES	**0,257**	**0,545**	**–0,163**	**0,206**	0,128	**0,653**	–0,122	1,000

[(a)] In grassetto se sono statisticamente diversi da zero, in corsivo se sono vicini alla soglia (*borderline*)

Nella Tabella 35 sono riportate le durate medie trascorse dall'ultimo esame di matematica per facoltà e anno di iscrizione. Si può notare che l'anno di iscrizione può cogliere lo stesso effetto del tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica, ma, essendo una variabile di tipo «qualitativa» ordinata, non tiene conto della distanza da una modalità all'altra e dovrebbe essere meno precisa; tuttavia, in alcuni modelli non commentati ha mostrato una capacità esplicativa piú elevata, come pure il numero degli esami sinora sostenuti (NESI) e il numero degli esami di matematica sostenuti (NEM). Presumibilmente, la sua variabilità elevata per modalità dell'anno di iscrizione e il peso diverso delle varie modalità generano un disturbo notevole che indebolisce l'effetto del tempo. In realtà, gli studenti di ogni corso appartengono in prevalenza alla stessa coorte (iscritti allo stesso anno) e vi sono molti studenti con un tempo (TTEM) circa uguale e prestazioni molto diverse.

Tabella 35 – *Media ($\bar{x}$), deviazione standard (s), e numero di casi (n) del tempo trascorso (in mesi) dall'ultimo esame di matematica per facoltà e per anno di iscrizione (AI)*

AI		**II**	**III**	**IV**	**V**	**I F.C.**	**II F.C.**	**≥III F.C.**	**Totale**
Ingegneria	$\bar{x}$	22,0	12,8	17,4	26,1	29,4	27,6	32,6	18,0
	s		8,9	8,4	10,9	13,6	17,5	17,0	11,9
	n	1	176	59	64	16	5	14	335
Economia	$\bar{x}$		13,4	25,0	30,8	38,8	46,4	74,3	28,0
	s		5,2	8,6	11,2	14,5	14,0	33,0	16,8
	n		38	82	45	20	5	8	198

3.3.1. Determinanti del punteggio nella facoltà di Ingegneria

L'accertamento della significatività delle differenze osservate tra le medie relative alle modalità dei caratteri qualitativi si può eseguire con un'analisi della covarianza (ANCOVA). Le variabili quantitative esplicative, riportate in Tabella 34, sono correlate tra loro e non tutte sono determinanti per il punteggio. Si è applicata, perciò, una regressione lineare multipla selezionando le variabili significative e i regressori sono risultati: VDM, NESI, NEM, VMES. Tali variabili sono diventate le covariate dell'ANCOVA e i caratteri introdotti come fattori sono stati: il genere, il tipo di titolo di studio, il corso di laurea, gli anni di iscrizione, e la condizione lavorativa. Non risultano differenze significative, né nelle medie e né nelle interazioni; ma il numero di fattori, e quindi di celle, è assai elevato.

L'assenza di interazioni rende piú semplice la costruzione di un modello di regressione multipla per individuare la struttura (*pattern*) delle influenze dei caratteri sul punteggio totale conseguito al test. I caratteri qualitativi sono stati introdotti con tante variabili dicotome, quanto sono le modalità possibili, meno una. Il genere è stato dicotomizzato in 0 (per gli uomini) e 1 (per le donne). Le variabili qualitative (tipo di scuola secondaria frequentata, corso di laurea, e condizione lavorativa) sono state introdotte come variabili di comodo (*dummy*), dopo avere definito l'*individuo di riferimento*; ossia, la modalità del carattere che non veniva inserita per evitare la multicollinearità con le restanti variabili di comodo del carattere e che, pertanto, era inglobata nella costante del modello di regressione.

La Tabella 36 riporta le stime dei parametri del modello di regressione. La scelta dei regressori è stata effettuata tra tutte le variabili quantitative disponibili assieme a quelle di comodo, ma il risultato è rimasto immutato: il «tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica» aveva un parametro che non era statisticamente significativo e, perciò, la variabile è stata eliminata dal modello; tuttavia, aveva un segno negativo, atteso, implicante una diminuzione del punteggio all'aumentare del tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica. Il voto conseguito all'esame di maturità ha una influenza positiva; ossia, all'aumentare del voto di maturità aumenta il punteggio conseguito e, quindi, aumenta la prestazione negli esercizi di matematica; si può concludere, perciò, che è predittivo sui risultati successivi. Anche il «voto medio relativo agli esami sostenuti» ha un coefficiente positivo, ma il suo impatto è uguale a quello del voto conseguito all'esame di maturità; infatti, i coefficienti standardizzati sono uguali. Gli studenti che frequentano Ingegneria Meccanica conseguono, in media, punteggi piú elevati; mentre quelli provenienti dal Liceo Classico tendono a conseguire, in media, punteggi piú bassi: il coefficiente è negativo e la probabilità di significatività è vicina al valore critico. Il numero di soggetti che entrano nel modello sono 288. La percentuale di varianza spiegata dal modello (coefficiente di determinazione o R^2) è pari al 19,3% (corretta per i gradi di libertà); non è, quindi, molto elevata. Gli assunti del modello di regressione sono complessivamente soddisfatti.

Le variabili quantitative, esposte in Tabella 34 (eccetto PC), possono essere «riassunte» o «ridotte» tramite un'analisi fattoriale. Gli autovalori maggiori di uno sono solo due e spiegano il 65,5% della varianza e il test di Kaiser-Meyer-Olkin è pari a 0,659. L'adeguatezza dell'analisi può considerarsi mediocre, sebbene ancora accettabile. I due fattori sono interpretabili: il primo rappresenta l'*età universitaria* dello studente e il secondo indica il *rendimento complessivo* negli studi. Solo quest'ultimo entra nel modello di regressione. Il test relativo all'ipotesi (nulla) di uguaglianza a zero dei restanti autovalori conduce al suo rifiuto, con un livello di significatività del 5%.

Con tre fattori la percentuale di varianza spiegata sale al 78,4%; ma il terzo fattore è una «variante» del primo e nel modello di regressione entra sempre e solo il secondo. Il test relativo all'ipotesi (nulla) di uguaglianza a zero dei restanti autovalori si può ancora eseguire; ma l'ipotesi non può essere accettata a un livello di significatività dell'1%. Con quattro fattori la percentuale di varianza spiegata diventa l'87,7% e i fattori possono cosí denominarsi, in ordine: l'età universitaria, il rendimento universitario, il tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica *e* dall'iscrizione, il voto di diploma (che diventa un fattore specifico). Nella Tabella 37 sono riportati i pesi fattoriali (*factor loading*). Non esistono piú i gradi di libertà per verificare l'uguaglianza a zero dei restanti fattori. Ne consegue che l'analisi è un po' inefficace; tuttavia, si possono utilizzare le componenti principali nella regressione, dove entrano le ultime tre componenti; in particolare, la componente F3, che è riportata in Tabella 37 e è assimilabile a TTEM, presenta un coefficiente di regressione pari a –0,23 con $t_{269} = -1{,}915$ e $p < 0{,}057$ (ossia una probabilità di significatività vicino alla soglia critica). Ne consegue che l'effetto di TTEM (il tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica) sulla prestazione al test ha una struttura complessa, «mediata» e «concorrente» con altre variabili; mentre, TTEM non entra nei modelli con l'uso delle variabili originarie.

Tabella 36 – *Stima dei parametri ($\hat{\beta}_i$) del modello di regressione (variabile dipendente è il punteggio conseguito al test), errori standard [*ES($\hat{\beta}_i$)*], coefficienti standardizzati, t di Student, e probabilità di significatività a Ingegneria*[(a)]

Variabili nel modello	$\hat{\beta}_i$	ES($\hat{\beta}_i$)	$\hat{\beta}_i$ st.d	*t*-Stud.	Sign.
Costante	–2,304	1,543		–1,494	0,136
Donne (1/0)	–0,716	0,364	–0,105	–1,965	0,050
Liceo Classico	–1,060	0,554	–0,102	–1,914	0,057
Voto Diploma di Maturità	0,078	0,021	0,223	3,716	0,000
Ingegneria Elettronica	–0,971	0,396	–0,135	–2,453	0,015
Numero Esami Sostenuti da Iscrizione	–0,075	0,029	–0,192	–2,591	0,010
Numero Esami di Matematica	0,740	0,225	0,243	3,296	0,001
Voto Medio Esami Sostenuti	0,246	0,071	0,223	3,447	0,001

(a) $R_c^2 = 0{,}193$; $F_{7,281} = 10{,}818$ (con probabilità di significatività 0,000); $n = 288$.

Tabella 37 – *Matrice ruotata (con metodo varimax e normalizzazione di Kaiser) dei pesi fattoriali dei fattori comuni (estratti con il metodo dell'analisi delle componenti principali) a Ingegneria*[(a)]

Variabili	F1	F2	F3	F4
VDM - Voto Diploma di Maturità	0,00338	0,24752	0,00717	**0,96032**
AI - Anno di iscrizione	**0,72107**	–0,05998	**0,51315**	–0,04069
NESI - Numero Esami Sostenuti da Iscrizione	**0,84710**	0,11023	0,34849	0,06081
NEM - Numero Esami di Matematica	**0,88731**	0,25190	–0,14006	0,01149
VMES - Voto Medio Esami di Matematica	0,05480	**0,94229**	0,01953	0,07012
TTEM - Tempo Trascorso da Esame di Matematica	0,15095	0,03607	**0,95063**	0,01437
VMES - Voto Medio Esami Sostenuti	0,22271	**0,81238**	0,01650	0,32852

(a) In grassetto i pesi fattoriali maggiori di 0,5; evidenziati (in azzurro o scuro) se minori 0,25.

3.3.2. Determinanti del punteggio nella facoltà di Economia

L'analisi è stata ripetuta per la facoltà di Economia, seguendo un procedimento analogo. Le variabili quantitative esplicative, riportate in Tabella 34, sono ancora correlate tra loro e non tutte sono determinanti per il punteggio: la selezione delle variabili significative ha mostrato che solo VMEM era influente sul punteggio e si è usata, perciò, come covariata nell'ANCOVA. I caratteri introdotti come fattori sono stati: il *genere*, il tipo di *diploma*, il *corso* di laurea, e gli *anni* di iscrizione. La condizione lavorativa si è tralasciata perché non vi erano casi sufficienti. L'interazione tra le quattro variabili (genere*diploma*corso*anni) ha mostrato una probabilità di significatività critica: $F_{1,138} = 3{,}454$ con $p < 0{,}065$. L'unico fattore che ha mostrato una differenza, ancora non significativa, bensí solo vicino alla soglia critica, è stato il tipo di diploma: $F_{3,138} = 7{,}419$ con $p < 0{,}079$. In definitiva, al livello di significatività del 5%, non risultano differenze né nelle medie e né nelle interazioni; ma il numero di fattori, e quindi di celle, rimane assai elevato.

Si è costruito, allora, con un procedimento analogo a quello utilizzato per la facoltà di Ingegneria, un modello di regressione multipla: le stime dei parametri sono riportate nella Tabella 38. Anche qui il «tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica» aveva un parametro che non era statisticamente significativo e, perciò, la variabile è stata eliminata dal modello; aveva sempre un segno negativo, atteso, implicante una diminuzione del punteggio all'aumentare del tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica. Il voto conseguito all'esame di maturità ha una influenza positiva; ossia, all'aumentare del voto di maturità aumenta il punteggio conseguito e, quindi, aumenta la prestazione negli esercizi di matematica; si può concludere, perciò, che è predittivo sui risultati successivi. Non entra nel modello il «voto medio relativo agli esami sostenuti», ma il «voto medio conseguito agli esami di matematica» e ha un coefficiente positivo, ma il suo impatto è un po' piú basso di quello del voto conseguito all'esame di maturità (cfr. i coefficienti standardizzati). Il numero di esami di matematica già sostenuti ha un impatto positivo, anche se non è significativo. Gli studenti provenienti da una scuola della categoria residuale «altro» (ossia, una scuola diversa dal Liceo Scientifico, dal Liceo Classico, e dall'Istituto Tecnico Commerciale) mostrano in media un risultato piú basso: era la modalità che «generava» una probabilità di significatività critica nell'ANCOVA. Gli studenti del Liceo Classico tendono a conseguire, in media, punteggi piú bassi, ma la probabilità di significatività è intorno al 12% e, quindi, la differenza non è statisticamente significativa. Gli studenti che frequentano Economia e Commercio conseguono, in media, punteggi piú elevati. Il numero di soggetti che entrano nel modello sono 195. La percentuale di varianza spiegata dal modello è pari al 20,3% (corretta per i gradi di libertà); non è, quindi, molto elevata, ma gli assunti del modello di regressione sono complessivamente soddisfatti.

Anche per la facoltà di Economia si può eseguire un'analisi fattoriale per le variabili quantitative, esposte in Tabella 34 (eccetto PC). Gli autovalori maggiori di uno sono risultati ancora due: spiegano il 62,6% della varianza e il test di Kaiser-Meyer-Olkin è pari a 0,612. L'adeguatezza dell'analisi può considerarsi mediocre, sebbene ancora accettabile. I due fattori sono interpretabili, ma si ha un'inversione rispetto a Ingegneria: il primo rappresenta il *rendimento complessivo* negli studi, e il secondo l'*età universitaria* dello studente. Come a Ingegneria, solo il primo entra nel modello di regressione, che corrisponde al secondo di Ingegneria. Il test relativo all'ipotesi (nulla) di uguaglianza a zero dei restanti autovalori comporta il suo rifiuto a un livello di

significatività del 5%. Con tre fattori la percentuale di varianza spiegata diventa il 76,1% e il terzo fattore «condensa» il numero degli esami sostenuti (NEM e NESI). Anche qui, nel modello di regressione entra sempre e solo il primo fattore: il terzo ha un parametro con una probabilità di significatività pari a 0,076. Il test relativo all'ipotesi (nulla) di uguaglianza a zero dei restanti autovalori si può ancora eseguire e l'ipotesi può essere accettata. In analogia con Ingegneria, si procede all'estrazione di quattro componenti principali. La percentuale di varianza spiegata è l'86,5% e i fattori possono cosí denominarsi, in ordine: l'età universitaria (AI e TTEM), il rendimento universitario (VMEM e VMES), il rendimento scolastico complessivo (VMD, VMES, NES), e il numero di esami (NEM e NESI). Nella Tabella 39 sono riportati i pesi fattoriali (*factor loading*). Nella regressione entrano la seconda e la terza componente; la quarta (numero di esami) presenta un coefficiente di regressione pari a 0,184 con $t_{182} = 1{,}443$ e $p < 0{,}151$. La prima componente che «assimila» TTEM viene eliminata quasi súbito dal modello. Ne consegue che, nella facoltà di Economia, l'effetto del tempo trascorso sulla prestazione al test non influenza gli esiti né direttamente, né indirettamente tramite le componenti principali estratte.

Tabella 38 – *Stima dei parametri ($\hat{\beta}_i$) del modello di regressione (variabile dipendente è il punteggio conseguito al test), errori standard [*ES($\hat{\beta}_i$)*], coefficienti standardizzati, t di Student, e probabilità di significatività a Economia*[(a)]

Variabili nel modello	$\hat{\beta}_i$	ES($\hat{\beta}_i$)	$\hat{\beta}_i$ st.d	*t*-Stud.	Sign.
Costante	–2,962	1,363		–2,172	0,031
Donne (1/0)	–0,384	0,256	–0,101	–1,500	0,135
Maturità diversa da classica, scientifica, ITC	–1,246	0,271	–0,318	–4,593	0,000
Voto Diploma di Maturità	0,060	0,021	0,215	2,865	0,005
Economia e Commercio	0,926	0,265	0,230	3,502	0,001
Numero Esami di Matematica	0,743	0,443	0,110	1,677	0,095
Voto Medio Esami di Matematica	0,099	0,044	0,158	2,255	0,025

(a) $R_c^2 = 0{,}203$; $F_{6,189} = 9{,}289$ (con probabilità di significatività 0,000); $n = 195$.

Tabella 39 – *Matrice ruotata (con metodo varimax e normalizzazione di Kaiser) dei pesi fattoriali dei fattori comuni (estratti con il metodo dell'analisi delle componenti principali) a Economia*[(a)]

Variabili	F1	F2	F3	F4
VDM - Voto Diploma di Maturità	–0,14952	0,25599	**0,88012**	–0,00408
AI - Anno di iscrizione	**0,90640**	–0,15641	–0,06328	0,09982
NESI - Numero Esami Sostenuti da Iscrizione	**0,64783**	–0,04571	0,49549	0,32677
NEM - Numero Esami di Matematica	0,04336	0,08916	0,04347	**0,97449**
VMES - Voto Medio Esami di Matematica	–0,09142	**0,95160**	0,06804	0,00300
TTEM - Tempo Trascorso da Esame di Matematica	**0,88695**	0,02525	–0,17602	–0,11322
VMES - Voto Medio Esami Sostenuti	–0,03174	**0,74495**	**0,50726**	0,18652

(a) In grassetto i pesi fattoriali maggiori di 0,5; evidenziati (in azzurro o scuro) se minori di 0,25.

3.4. Confronto tra le facoltà di Ingegneria e Economia

Gli studenti di Ingegneria hanno risposto correttamente, in media, a 7-8 domande su 12, mentre gli studenti di Economia hanno risposto esattamente solo a 3-4 domande. Questa differenza di preparazione è netta nelle domande relative a logaritmi, potenze, disequazioni, funzioni di una e due variabili; meno evidente, ma sempre presente, è il divario nelle domande relative a serie, monotonia, e integrali (a). Questa differenza, sebbene prevedibile, è interessante sia perché anche a Ingegneria i concetti di base non sono cosí «consolidati», sia perché la prestazione degli studenti di Economia è stata deludente; infatti, hanno sbagliato molte risposte e non hanno mostrato una grande disponibilità a collaborare: il tempo richiesto per l'esecuzione del test era elevato, i corsi erano quelli fondamentali e l'intervallo era vissuto come una specie di «ricreazione». Le medie dei punteggi, totali e per domanda, suddivisi per corso di laurea, sono riportate nella Tabella 40.

Il punteggio totale non presenta eterogeneità tra le due facoltà (test di Levene $p<0{,}256$); questo, pur non essendo scontato, si poteva sospettare. Sulle singole domande il punteggio, x, è dicotomico: 1 se è esatta, 0 se è sbagliata; allora, l'elevata sproporzione tra i punteggi, fa sì che le differenze di varianza siano statisticamente significative, perché $\mathrm{Var}(x) = P(1-P)$, dove P è la proporzione delle risposte corrette. Non c'è una differenza statisticamente significativa tra i corsi di laurea della facoltà di Ingegneria, anche se gli studenti di Ingegneria Meccanica mostrano di essere un po' più preparati dei loro colleghi. Per quanto riguarda la facoltà di Economia c'è, invece, una differenza statisticamente significativa tra gli studenti del corso di laurea in Economia e Commercio e gli altri (Economia Aziendale, Economia Politica); in ogni caso l'entità della differenza, pur essendo significativa, è piccola.

Tabella 40 – *Medie del punteggio conseguito, sia totale (con deviazione standard) e sia alle singole domande, per corso di laurea e per facoltà*

Variabili	Ingegneria				Economia			Totale
	I.Mat.	I.Mecc.	I.Elettr.	I.Inf.	CLEA	CLEC	CLEP	
Punteggio totale	**8,158**	**8,017**	**7,442**	**7,679**	**3,095**	**4,000**	**3,700**	**6,236**
(deviazione st.d)	1,979	2,337	2,218	2,509	1,535	2,174	2,152	3,047
Logaritmi	1,000	0,931	0,953	0,908	0,476	0,522	0,600	**0,775**
Potenze	1,000	0,828	0,767	0,835	0,476	0,567	0,533	**0,715**
Disequazioni	0,789	0,793	0,721	0,771	0,352	0,403	0,200	**0,618**
Monotonia	0,263	0,454	0,395	0,376	0,219	0,209	0,100	**0,333**
Funzione di 1 V. (a)	0,526	0,506	0,488	0,569	0,133	0,299	0,267	**0,408**
Funzione di 1 V. (b)	0,684	0,661	0,419	0,523	0,181	0,164	0,167	**0,435**
Serie	0,316	0,448	0,721	0,532	0,133	0,179	0,333	**0,382**
Integrali (a)	0,158	0,241	0,186	0,183	0,133	0,164	0,033	**0,181**
Integrale (b)	1,000	0,966	0,953	0,936	0,438	0,522	0,633	**0,786**
Funzione di 2 V. (a)	0,842	0,764	0,628	0,688	0,105	0,269	0,233	**0,525**
Funzione di 2 V. (b)	0,842	0,598	0,558	0,615	0,114	0,254	0,167	**0,448**
Sistemi lineari	0,737	0,828	0,651	0,743	0,333	0,448	0,433	**0,631**

Logaritmi. Tutti i corsi di laurea di Ingegneria hanno medie simili tra loro e, diversi da tutti i corsi di laurea di Economia, in accordo con l'andamento generale già delineato. Tra i primi, i migliori risultati sono ottenuti dagli studenti appartenenti al

corso di laurea in Ingegneria dei Materiali; tra i secondi, la media piú alta si osserva tra gli studenti appartenenti al corso di laurea in Economia Politica.

Potenze. Si ha ancora una netta inferiorità di tutti i corsi di laurea di Economia rispetto a tutti quelli di Ingegneria. Tra questi ultimi, però, si nota che il corso di Ingegneria dei Materiali (ancora il migliore), non presenta sostanziali differenze rispetto ai corsi di Ingegneria Meccanica e Ingegneria Informatica, ma si discosta molto dal corso di Ingegneria Elettronica che risulta inferiore. Tra i corsi di Economia, il migliore è risultato quello di Economia e Commercio.

Disequazioni. A Ingegneria gli esiti medi sono per lo più omogenei, con una leggera superiorità dei corsi di Ingegneria dei Materiali e Ingegneria Meccanica. Tra i corsi di Economia, le medie sono tutte molto piú basse di quelle di Ingegneria: il corso di laurea in Economia e Commercio risulta migliore del corso di laurea in Economia Politica che ha conseguito un punteggio piuttosto basso.

Monotonia. A Ingegneria dei Materiali gli studenti conseguono il punteggio piú basso dei loro colleghi, che è simile a quello ottenuto dagli studenti di Economia.

Funzioni di una variabile. Nella prima domanda (a) si nota ancora una netta superiorità, in media, di tutti i corsi di Ingegneria rispetto a quelli di Economia. Tra questi ultimi, esiste una notevole differenza tra il corso di laurea in Economia e Commercio (che presenta un punteggio più alto) e il corso di laurea in Economia Aziendale. Nella seconda domanda (b) i punteggi conseguiti dagli studenti di Ingegneria dei Materiali e Ingegneria Meccanica (i migliori) sono simili, mentre i punteggi piú bassi sono conseguiti dagli studenti di Ingegneria Elettronica. Gli studenti di Economia presentano valori medi tra loro molto omogenei e sempre molto piú bassi di quelli ottenuti da tutti gli studenti di Ingegneria.

Serie. Gli studenti di Ingegneria Elettronica riportano il punteggio medio più alto, evidenziando una notevole differenza sia rispetto agli studenti di Economia, sia rispetto ai loro colleghi di Ingegneria. Tra gli studenti di Economia i migliori sono risultati quelli appartenenti al corso di Economia Politica.

Integrali. Nella prima domanda (a), forse perché di tipo concettuale piú che di calcolo, è l'unica in cui si rileva una certa uniformità nei punteggi medi conseguiti dagli studenti delle due facoltà. L'unico corso di laurea che presenta differenze consistenti rispetto agli altri è quello di Ingegneria Meccanica. Nella seconda domanda (b) si nota ancora che tutti i corsi di laurea di Ingegneria sono simili tra loro e, allo stesso tempo, diversi da tutti i corsi di laurea di Economia. Questi ultimi hanno conseguito un punteggio notevolmente piú basso, in particolare, il corso di Economia Aziendale.

Funzioni di due variabili. La domanda (a) presenta un profilo simile a quello della domanda (b) sugli integrali. La domanda (b) ha creato difficoltà, oltre agli studenti di Economia, anche agli studenti appartenenti ai corsi di Ingegneria Meccanica e Ingegneria Elettronica. Il risultato migliore si ha nel corso di laurea in Ingegneria dei Materiali e il peggiore nel corso di laurea in Economia Aziendale.

Sistemi lineari. Si sono verificate le solite differenze tra i corsi di Ingegneria e i corsi di Economia. Tra i primi, la media piú bassa si ha a Ingegneria Elettronica, soprattutto rispetto agli ottimi punteggi conseguiti dagli studenti di Ingegneria Meccanica. Tra i secondi, si evidenzia una lieve superiorità degli studenti di Economia e Commercio, soprattutto rispetto a quelli di Economia Aziendale.

L'elaborazione dei dati ha mostrato che il punteggio conseguito al test non presenta alcuna correlazione con il tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica;

pertanto, non sembra influire sulla capacità di ricordare e di usare nel lungo termine i concetti appresi. Tale risultato può dipendere dal tipo di domande selezionate, che tendevano a accertare le conoscenze piú elementari dei dominî selezionati. Come ci si aspettava, le variabili che più influenzano la capacità di rendimento degli studenti sono il voto conseguito all'esame di maturità e il voto medio relativo agli esami sostenuti; in particolare, in alcuni casi, quest'ultimo presenta un peso maggiore rispetto al primo. È emerso anche che non è importante il primo esame di matematica per ricordare i concetti di base, ma piuttosto il secondo. L'interpretazione di questo risultato è un po' controversa in quanto si potrebbe dedurre che «*studiando più matematica, gli argomenti principali rimangano più impressi nel tempo*» (*tesi*). Tale tesi, cosí argomentata, è un po' insoddisfacente perché studiare nuovi argomenti non implica necessariamente che si siano assimilati quelli già trattati o incontrati. Il meccanismo che può giustificare l'asserto è il prolungato impiego nel tempo dei concetti appresi: un altro esame di matematica comporta spesso il richiamo di nozioni già immagazzinate e, magari, dimenticate; perciò, un doppio esame di matematica costringe gli studenti a usare i concetti di base più a lungo e, per questo, la memorizzazione può rimanere più impressa. Inoltre, se si tiene conto che i due test, accertando solo i concetti di base, sono simili in quanto a difficoltà sostanziale, gli studenti di Ingegneria rendono meglio degli studenti di Economia per altre due ragioni. La prima si riferisce all'esistenza di una selezione all'origine in quanto, spesso, gli studenti più portati per la matematica si iscrivono alla facoltà di Ingegneria piuttosto che alla facoltà di Economia. La seconda riprende il meccanismo di giustificazione della *tesi* perché occorre considerare che gli studenti di Ingegneria applicano la matematica anche in altri corsi e, quindi, i concetti di base di questa materia dovrebbero essere parte integrante del loro patrimonio conoscitivo. La *tesi* in sé sembra contraddetta dall'esito conseguito dagli studenti che hanno sostenuto anche l'esame di Metodi Matematici, i quali presentano una media inferiore a coloro che ne hanno sostenuto solo due. Nell'àmbito di tale schema interpretativo, i risultati ottenuti dagli studenti di Ingegneria non appaiono poi così brillanti, anche se si può presumere, come si è detto, che molti di loro non abbiano eseguito il test con l'attenzione e l'impegno che avrebbero dedicato a un esame vero e proprio. La stessa contro-argomentazione, comunque, può essere applicata agli studenti di Economia che, in più, hanno lo svantaggio di non utilizzare la matematica in altri corsi e per questo possono aver dimenticato concetti studiati anche molti anni prima e mai più ripresi.

Il periodo trascorso dall'ultimo esame di matematica non sembra essere una variabile determinante per le conoscenze di matematica mantenute nel tempo, anche se la distribuzione congiunta dei due caratteri, riportata nella Tabella 41, mostra una certa influenza. Tale impatto può derivare, però, da altri fattori e, quindi, l'influenza può essere spuria oppure il tempo agisce in concomitanza con le altre determinanti che risultano piú «forti », mascherando la sua azione.

Tabella 41 – *Numero di soggetti e percentuali di riga per classi di punteggio, per classi di anni trascorsi dall'ultimo esame di matematica, e per facoltà*

Punti	Ingegneria				Economia			
	1 anno	**2 anni**	**3 e piú**	**Totale**	**1 anno**	**2 anni**	**3 e piú**	**Totale**
0-3	5	6	3	14	13	39	52	104
	35,7	42,9	21,4	100,0	12,5	37,5	50,0	100,0
4-5	12	15	6	33	11	16	43	70
	36,4	45,5	18,2	100,0	15,7	22,9	61,4	100,0
6-7	37	30	20	87	4	6	8	18
	42,5	34,5	23,0	100,0	22,2	33,3	44,4	100,0
8-9	48	45	17	110	1	3	1	5
	43,6	40,9	15,5	100,0	20,0	60,0	20,0	100,0
10-12	46	30	17	93		1		1
	49,5	32,3	18,3	100,0		100,0		100,0
Totale	**148**	**126**	**63**	**337**	**29**	**65**	**104**	**198**
	43,9	37,4	18,7	100,0	14,6	32,8	52,5	100,0

4. Analfabetismo di ritorno o ritorno di un luogo comune?

Le prestazioni ottenute in un test dipendono da numerosi fattori personali —genere, età, «livello di benessere», capacità di rendimento scolastico, inclinazione per la materia— e circostanziali —ambiente di svolgimento della prova, eventuale influenza «ecologica» tra i partecipanti, motivazioni, effetto-sorpresa— (Kaplan, Saccuzzo, 1997; Pedrabissi, Santinello, 1997). I risultati ottenuti al test di matematica devono essere esaminati, quindi, con una certa cautela perché non è stato possibile controllare tutte le variabili che possono influenzare gli esiti. Ciò nonostante, le osservazioni sopra riportate mostrano aspetti interessanti e coerenti con quelli attesi; ma proprio nell'individuazione di questi ultimi sta il *busillis*. L'accertamento della permanenza dell'apprendimento di alcuni concetti di matematica, dopo che sia trascorso un certo periodo di tempo dall'ultimo esame di matematica, sembra indicare che vi sia una certa labilità o *volatilità* dei concetti e delle tecniche apprese. Data la semplicità delle nozioni richieste, si potrebbe concludere che, con un discutibile e dubbio sintagma, vi sia un certo «*analfabetismo di ritorno*» dei concetti di matematica. L'uso frequente e indiscriminato del termine, associato spesso a toni allarmistici, ricorda proposizioni diffuse e attraenti perché creano un riferimento lontano e, perciò non sempre verificabile, magico: «*mala tempora currunt*», oggi è sempre peggio di ieri, il passato è meglio del presente, i giovani sono meno preparati di quelli di una volta … una volta, sí, che si studiava. Ah! *Non vi è bello, se non ciò che non è* … Un luogo comune è sostenere che la preparazione degli studenti universitari va declinando nel tempo e occorre un rimedio, ma non si sa quale rimedio, se non quello di aumentare i programmi e lo spazio per certe materie. Ognuno sostiene che nella sua materia c'è una ignoranza catastrofica: il matematico, lo storico, il geografo, il letterato, il linguista.

Il giornalista Ubiglia (2001) commenta i dati di un'indagine (condotta su un certo numero di ragazzi alla visita di leva del 2000 e attraverso interviste a domicilio a numerose ragazze) e afferma che l'analfabetismo di ritorno è una «piaga del nostro tempo». Da quella indagine emerge, infatti, che *un quarto* dei giovani presenta gravi difficoltà nel leggere e comprendere il significato di alcune espressioni o particolari termini. Per giudicare adeguatamente tali dati, occorrerebbe esaminare quali sono questi termini e confrontare gli esiti attuali con quelli di indagini simili, condotte qualche decennio precedente; ma queste non esistono. Si può considerare, tuttavia, che negli anni sessanta solo una percentuale molto bassa di persone proseguiva dopo le scuole dell'obbligo. Nel censimento del 1961, la percentuale di laureati era l'1,3% e, di questi, le donne erano il 24%; mentre nel censimento del 1991, la percentuale di laureati era il 3,8% e, di questi, le donne erano il 42,2%: si veda la Tabella 42 costruita con i dati ufficiali (Istat, 1995, 2002). Questi sono trascurati nel dibattito perché si sente l'urgenza di elevare e migliorare la quantità e qualità del sapere dei cittadini. Si utilizzano, perciò, argomentazioni analoghe a quelle di Ubiglia (2001): «Nonostante l'obbligo scolastico fino a 15 anni, "leggere, scrivere e far di conto" era ciò che essenzialmente, un tempo, veniva insegnato alle elementari. Chi aveva frequentato la quinta elementare, infatti, una volta, entrava nei mondo del lavoro e per lo Stato doveva essere in grado di comprendere ciò che giornalmente la vita presentava». Si può osservare che una volta (quando?) dimenticavano, come oggi, a leggere e scrivere e vi era un elevato tasso di analfabetismo, non di ritorno, ma primario! Ubiglia continua: «Ci sono, infatti, meno ragazzi bocciati, non esistono più gli esami di riparazione e quindi, la "paura" della scuola è diminuita e molti si sentono "incentivati" a studiare meno … [tra i fattori che favoriscono l'ignoranza si citano] … il disinteresse per la lettura di libri e giornali; … la

televisione, internet e i *videogames* … Il disabituarsi a leggere porta, dunque, inevitabilmente non tanto a non saper leggere e scrivere nel vero senso della parola quanto ad un "analfabetismo di ritorno", che è dovuto a non usare e, successivamente, a non comprendere una serie di termini o di modi di dire, e pian piano ciò porta a una riduzione del proprio vocabolario».

Si è preso Ubiglia come emblema di una tendenza in àmbito giornalistico, e non solo. Si parte spesso da dati simili per collegarsi a altri tipi di ragionamento: si vedano Maltese (2004) e Vertecchi (2002) tra i numerosi articoli sui quotidiani. Vertecchi precisa che la denominazione, *analfabetismo di ritorno*, è impropria perché l'analfabeta è colui che non *possiede* il codice alfabetico e, dunque, è incapace di «far corrispondere elementi fonetici a simboli grafici e viceversa». La specificazione «di ritorno» indica «la perdita del codice che può derivare dalla sua non utilizzazione associata all'immersione in un ambiente privo, o comunque povero, di simboli alfabetici». Vertecchi propone di denominare *illetteratismo* (*illiteracy*) la deprivazione funzionale della competenza alfabetica, che si riferisce all'incapacità di acquisire o formulare un messaggio, seppure semplice, per quei soggetti che hanno fruito della scuola dell'obbligo e sono immersi in un ambiente saturo di elementi alfabetici.

Tabella 42 – *Popolazione residente in età da 6 anni in poi per titolo di studio e per anno di censimento (a partire dal 1951)*

	1951		1961		1971		1981		1991		2001	
TdS	**V.A.**	**%**	**V.A.**	**%**	**V.A.**	**%**	**V.A.**	**%**	**V.A.**	**%**	**V.A.**	**%**
A	5456	12,9	3796	8,3	2547	5,2	1608	3,1	1146	2,1		
AsT	7581	17,9	7314	16,0	13240	27,1	9548	18,2	6533	12,2		
LE	24946	59,0	27588	60,5	21586	44,3	21278	40,6	17406	32,5	19766	36,5
LM	2514	6,0	4375	9,6	7151	14,7	12481	23,8	16412	30,7	16554	30,6
DP											2541	4,7
DM	1373	3,2	1939	4,3	3364	6,9	6019	11,5	9937	18,7	11749	21,7
L	429	1,0	603	1,3	883	1,8	1477	2,8	2048	3,8	3547	6,5
Tot.	**42299**	**100,0**	**45615**	**100,0**	**48771**	**100,0**	**52411**	**100,0**	**53482**	**100,0**	**54157**	**100,0**

Leggenda: V.A. (Valori assoluti); Titolo di Studio (TdS); Analfabeta (A); Analfabeta senza Titolo di studio (AsT); Licenza Elementare (LE); Licenza Media (LM); Diploma Professionale (DP); Diploma di Maturità (DM); Laurea (L).

Il fenomeno dell'illetteratismo coinvolge tutti i paesi e, in particolare, i paesi sviluppati perché, per gli altri, il problema piú grave è l'analfabetismo. L'illetteratismo ha ricevuto una notevole attenzione anche nel passato perché contrasta con lo sviluppo economico e la diffusione dell'istruzione obbligatoria che è stata estesa a circa otto anni di studio in molti paesi. Per esempio, negli Stati Uniti d'America il problema è stato affrontato molto tempo fa, tra tutti gli studi si vedano Hunter e Harman (1979). Nel loro rapporto (alla Fondazione Ford), si identifica e si definisce l'illetteratismo degli adulti, con età superiore a 15 anni e non piú a scuola, e le difficoltà funzionali derivanti dalla limitata istruzione conseguita; si illustrano le misure e i fattori che lo determinano; si descrivono i principali programmi attivati per prevenirlo. I loro risultati mostrano che vi sono milioni di illetterati adulti, molti dei quali vivono anche in condizioni svantaggiate (povertà, disoccupazione, discriminazione, isolamento sociale). Hunter e Harman (1979, pp. 25-27) sostengono che: «L'obiettivo dell'alfabetizzazione di massa del XX secolo significa molto piú che istruzione di massa: vuol dire anche partecipazione alle iniziative e ai vantaggi della società»; ma vi sono posizioni molto eterogenee: da chi vede il «problema» come un vantaggio per chi lo risolve, a chi lo intende come

strumento di potere, a chi come un mercato. Ogni posizione prevede conseguenze che contrastano con la diffusione capillare e elevata dell'istruzione.

Le azioni di contrasto al diffondersi dell'illetteratismo sono dall'esito incerto e la loro efficacia non è facilmente valutabile. Vi è un ampio accordo sulle conseguenze del suo aumento, come la ridotta flessibilità nell'adattamento alle innovazioni produttive, la resistenza alla *permeabilità* della formazione professionale, la superficialità nel rispetto delle norme sugli infortuni, e cosí via (Vertecchi, 2002). Alcune informazioni di tipo statistico, un po' dettagliate, si possono trovare in Lelli (2002), ma per valutare con accuratezza i risultati occorrerebbe esaminare le tecniche utilizzate (e non riportate) per misurare il livello di preparazione degli intervistati perché a questi test si possono applicare, a volte, le stesse critiche dei test dell'intelligenza (Huteau, Lautrey, 1997); per esempio, sono dipendenti dal tempo e dal luogo, ossia dalle aspettative e dagli standard della società, dalle interazioni culturali e economiche.

L'aumento degli anni di studio non implica, di per sé, un miglioramento della qualità e quantità del sapere; ma se si pensa ai tassi di analfabetismo degli anni cinquanta e sessanta e alla distribuzione dei titoli di studio in Tabella 42, allora si può concludere che si è verificato un lento miglioramento. I segnali che provengono dalle indagini non possono essere ignorati e occorre fare di piú. La strategia di intervento deve seguire, forse, piú percorsi. A livello locale occorre promuovere iniziative che raggiungano *veramente* le persone che hanno bisogno di migliorare la loro conoscenza di base. Il modo piú efficace, presumibilmente, è quello indiretto: creare una tendenza e una diffusione capillare del sapere. La televisione (come Internet o i videogiochi) non è il male che distoglie dallo studio, semmai può diventare un bene qualora si introducano programmi che valorizzino il sapere e lo diffondano tra le persone. Il problema è sempre quello degli ascolti e della pubblicità perché i programmi educativi non si sposano con il commercio e/o con questo tipo di pubblicità. Apprendere richiede fatica e impegno, non basta l'immersione totale, ma occorre uno sforzo attivo che porta il destinatario a abbandonare il conseguimento dell'obiettivo o a desistere di fronte agli ostacoli; pertanto, non si può sperare di ottenere risultati immediati e crescenti. Occorrono pazienza e tenacia e i risultati si potranno vedere solo a lungo termine, con la consapevolezza che si è sotto la spada (di Damocle) della *dimenticanza*.

In un sito internet è esposto un dato di una recente ricerca del Cede: il 50% degli italiani interpellati non sono stati in grado di capire l'aggettivo «remunerativo», il 90% non sa cosa voglia dire «causale», il 62% non conosce il significato del sintagma «a domicilio». Ciò non è sorprendente se si osserva che, come si evince dalla Tabella 42, il 67,1% ha un titolo di studio inferiore o uguale alla scuola media; ma il commentatore conclude che c'è un evidente fallimento del sistema scolastico nazionale. Conclusioni difficili e a volte contraddittorie con altri dati; per esempio, si sono trovate evidenze che mostrano un miglioramento della crescita economica con l'aumento dell'istruzione (Di Liberto, Symons, 2001). Si deve osservare, inoltre, che anche un chirurgo che smette di operare per un po' di tempo perde la sua abilità. È noto che le capacità apprese si logorano al passare del tempo e ci si dimentica di ciò che si conosce se non si «rinfresca o ripassa». In definitiva, l'apprendimento è un processo continuo non solo per fini espansivi, ma anche per fini conservativi; pertanto, occorre semplicemente attivare tutte le strategie, che aiutino a conseguire questi due obiettivi, e a tutti i livelli: nelle istituzioni locali, nella formazione professionale e non, nei media di tutti i generi.

5. Considerazioni conclusive

I questionari proposti nell'indagine condotta erano volti a valutare la conoscenza di concetti di base e la capacità di calcolo matematico in esempi *standard*, trattati in tutti i corsi di laurea; quindi, erano molto simili sia per gli studenti di Ingegneria, sia per quelli di Economia, pur non essendo identici. Ci si aspettava un rendimento diverso tra le due Facoltà, tenendo conto anche dell'esistenza di una selezione all'origine (si suppone che mediamente gli studenti con maggiore propensione allo studio della matematica si iscrivano a Ingegneria piuttosto che a Economia), ma il risultato va un po' oltre le previsioni. Come si vede dalla Tabella 15, circa il 70% degli studenti di Ingegneria ha risposto correttamente a più della metà delle domande del test e ben il 40% ha ottenuto un punteggio "alto" (superiore a 9): di conseguenza il risultato si può considerare soddisfacente. Al contrario, l'88% degli studenti di Economia ha risposto erroneamente (o non ha risposto) a più della metà delle domande. Nonostante si voglia tener conto della minore inclinazione verso la Matematica di tali studenti, il risultato induce comunque a riflettere, dato che molte delle domande proposte erano riferite a argomenti ritenuti "di base" ossia facenti parte del bagaglio culturale classico per un laureato in una disciplina che ha anche forti connotazioni scientifiche.

La differenza di preparazione appare netta nelle domande relative a logaritmi, potenze, disequazioni (per altro, tutti argomenti che dovrebbero essere trattati nelle Scuole Medie Superiori) e funzioni di una o più variabili; meno evidente, se pur sempre presente, nelle domande relative a serie, funzioni monotone e integrali (argomenti "universitari"). Tra i vari corsi di laurea della facoltà di Ingegneria non c'è differenza statisticamente significativa di rendimento, mentre per Economia appaiono più preparati gli studenti di Economia e Commercio (sia pure con un piccolo margine).

Si è osservata una certa influenza del voto di Maturità sugli esiti dei test: può essere interessante rilevare che il 46% degli iscritti a Ingegneria ha avuto un voto di Maturità superiore a 55/60, mentre per Economia tale percentuale scende al 28,5%. Così pure, non stupisce che consegua risultati migliori chi ha sostenuto due esami di Matematica rispetto a chi ne ha sostenuto uno solo; invece, l'aver sostenuto un terzo esame di Matematica non migliora sensibilmente il rendimento.

Se si considerano i voti conseguiti dagli studenti nei loro primi esami di Matematica (rispettivamente Analisi Matematica 1 e Analisi Matematica 2 per Ingegneria; Matematica Generale e Matematica Finanziaria 1 per Economia), le differenze tra le medie negli esami di livello corrispondente non sono elevate e questo farebbe pensare che le conoscenze di Matematica di base degli studenti di ambedue le facoltà siano sufficienti e conformi alle competenze richieste nel momento in cui la prova d'esame viene sostenuta. Ovviamente, a Ingegneria i programmi sono piú ampî e gli esami sono tendenzialmente piú selettivi; tuttavia, è evidente che gli studenti di Ingegneria continuano a usare con assiduità strumenti matematici in tutta la loro carriera universitaria, mentre ciò non accade a Economia, dove si nota maggiormente una scarsa conoscenza dei concetti matematici di base che potrebbe essere etichettata come *analfabetismo di ritorno*. Una spiegazione della dimenticanza dei concetti appresi durante lo studio si basa sull'esistenza, oramai riconosciuta, di diversi tipi di memoria, tra le quali la memoria di lavoro o memoria a «breve termine». Secondo questa teoria, l'atto del pensare utilizza la memoria di lavoro: gli «oggetti del pensiero» che sono manipolati mentalmente vengono immagazzinati temporaneamente in essa e «scaricati» appena superato l'esame (Schoenfeld, 2000). Di conseguenza, se si ritiene che *uno studente di Economia* debba avere un solido patrimonio di conoscenze matematiche,

eventualmente *per frequentare un master o per affrontare valutazioni quantitative, è forse necessario prevedere una qualche forma di "richiamo" o recupero di alcuni contenuti di base e oltre*. Se invece si ritiene che le conoscenze matematiche impartite nei corsi di base abbiano una funzione puramente strumentale in vista degli insegnamenti seguenti, allora potrebbe essere più utile ridurre ulteriormente i programmi, approfondendo solo alcuni argomenti specifici. Questo favorirebbe un'assimilazione più profonda e lascerebbe maggiore spazio alla presentazione di applicazioni. Inoltre, non si deve dimenticare che di norma gli studenti di queste Facoltà non hanno un interesse spiccato per la matematica "pura", ma spesso dubitano della sua utilità non vedendone l'applicazione immediata (Simons, 1988).

Un carattere esplicativo della diversa prestazione è che la formazione scolastica degli studenti che si iscrivono all'università è molto eterogenea, data la diversità della scuola secondaria dalla quale essi provengono. Dai dati raccolti si può evincere che vi sia una differenza in media tra i punteggi conseguiti al test rispetto ai diversi tipi di diploma di maturità, se non si considerano altre variabili che congiuntamente influenzano il rendimento scolastico individuale. L'eterogeneità è stata spesso presa, perciò, seppure in via ipotetica (Giossi, Bertani, 1994, p. 394), come uno dei tanti fattori esplicativi di fenomeni a essa correlati, come il ritardo accumulato da molti nel conseguimento del titolo di studio, la dispersione scolastica, e il rendimento negli studi. Se si tiene conto di altri fattori, allora l'effetto può diventare trascurabile; mentre la capacità individuale, espressa in termini di prestazioni precedenti, può diventare un fattore esplicativo determinante per l'esito scolastico; tuttavia, all'università, il successo nello studio dei corsi di matematica dipende fortemente dalla preparazione con cui lo studente si presenta.

Si può osservare che gli studenti provenienti dai licei non sono sempre distinti tra i vari tipi di liceo, mentre qui si è tenuto distinto il liceo classico dallo scientifico. Data la distinzione, si è ancora osservato, come in altri studi (Giossi, Bertani, 1994), un migliore rendimento tra chi proviene dai licei; in realtà, però, si è osservato solo un minor rendimento tra quelli che hanno frequentato il classico a Ingegneria. La spiegazione di questa differenza, rispetto alla tendenza generale, potrebbe dipendere dalle diverse scelte universitarie effettuate dagli studenti del classico. I loro sbocchi «naturali» sono altre aree disciplinari, diverse da Ingegneria e Economia; infatti, la loro proporzione è bassa, come è bassa anche la scelta iniziale del classico, rispetto allo scientifico. Negli ultimi anni, il numero degli iscritti allo scientifico è quasi il doppio degli iscritti al classico; ossia, vi è il rapporto di due a uno. In queste due facoltà, la proporzione di studenti provenienti dallo scientifico, rispetto a quelli del classico, è molto piú alta: vi è un rapporto dell'ordine di dieci a uno.

Si è evidenziata la necessità di impartire una formazione «di base» in cui l'essenziale non è l'accumulare conoscenze, ma la capacità di elaborare quello che è stato appreso come fondamento per un ulteriore apprendimento. Ciò che conta e è utile, sono proprio quelle conoscenze e quelle abilità che in una situazione successiva permettono di imparare con successo. Le risposte avute in alcuni esercizi, come quello sugli integrali, mostrano la necessità di sviluppare una didattica focalizzata sulla comprensione dei concetti, non tanto rivolta al calcolo quanto allo sviluppo di capacità critiche che consentano di effettuare le più opportune scelte strategiche nell'affrontare un problema (nello specifico, la risoluzione non richiedeva calcoli, ma semplicemente l'applicazione di una proprietà "teorica").

In sintesi, le informazioni predittive per il punteggio conseguito al test di matematica sono costituite prevalentemente dal voto di maturità, dal numero di esami di matematica sostenuti e dai voti in questi conseguiti; in alcuni casi, questi ultimi presentano un peso maggiore rispetto al primo. Il secondo esame di matematica, inoltre, appare piú determinante del primo per l'assimilazione dei concetti di base. Alcuni autori ipotizzano che le capacità di previsione degli esiti scolastici aumentano, quando si dispone di molteplici valutazioni dello studente (Giossi, Bertani, 1994). L'ipotesi sembra confermata dai risultati ottenuti nell'indagine in oggetto perché sia il voto dell'esame di maturità, sia il voto medio degli esami già sostenuti, sia il numero di esami superati di matematica costituiscono, in un certo senso, l'equivalente di piú misurazioni sullo stesso individuo e sono, pertanto, buoni previsori della prestazione scolastica successiva. Il processo di rendimento è influenzato e/o ostacolato da numerosi altri fattori, che non sono e non possono esser controllati con una indagine di questo tipo, come caratteristiche motivazionali, famigliari, e ambientali.

Dal punto di vista del docente, i risultati ottenuti e le riflessioni conseguenti, in accordo con quanto affermato in Coggi (2002), rafforzano la convinzione che, nell'àmbito dell'insegnamento, bisogna cercare di mantenere un clima costante di ricerca che badi al progresso nei contenuti, nella didattica, e nell'incisività della verifica.

Riferimenti bibliografici

Accascina G. *et alii*, 1998, *La strage degli innocenti*, Centro Ricerche Didattiche "U.Morin", Battiglin Editore, S. Zenone degli Ezzelioni (TV).

Afifi A. e Clark V.A., 1995, *Computer-Aided Multivariate Analysis*, 3.rd Edition, Chapman and Hall, London.

Beltrame F., Tagliasco V., 1990, *Studiare matematica all'Università*, Il Mulino, Bologna.

Bloom B.S., 1976, *Human Characteristics and School Learning*, McGraw-Hill, New York. Tr. it., 1979, *Caratteristiche umane e apprendimento scolastico*, Armando Editore, Roma.

Boiti A., Fiori C., 1997, *Sulla preparazione matematica all'inizio dell'Università*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 20B, N. 2, pp. 119-144.

Coggi C., 2003, Valutazione e professionalità: problemi attuali, *Notiziario della UMI*, Supplemento al n. 7, pp. 29-38.

Di Liberto A., Symons J., 2001, Education and Italian Regional Development, *Performance Discussion Paper*: 496, London School of Economics, Centre for Economic, London, pp. 1-22.

Domenici G., 2001, *Manuale della valutazione scolastica*, Editore Laterza, Bari.

Ebel R.L., Frisbie D.A., 1991, *Essentials of educational Measurement,* Englewood Cliffs.

Fabbris L., 1997, *Statistica multivariata: analisi esplorativa dei dati*, McGraw-Hill Italia, Milano.

Figari G., 1994, *Evaluer: quel référentiel?*, De Boeck, Bruxelles.

Furinghetti F., 1991, *Che cosa resta e che cosa dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica*, Quaderni del Dip. Mat. Università di Lecce, Q. 1, pp. 86-118.

Gagné E.D., 1989, *Psicologia cognitiva e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.

Gasperoni G., 1994a, La valutazione del rendimento scolastico, *Polis*, VIII, N. 3, pp. 367-370.

Gasperoni G., 1994b, Le prove di selezione per l'ammissione all'accademia militare di Modena, Polis, VIII, N. 3, pp. 371-381.

Giossi L., Bertani B., 1994, Il successo universitario: legame tra risultati accademici e scuola di provenienza, *Polis*, VIII, N. 3, pp. 383-398.

Giovannini M.L., 1985, La stesura di una prova oggettiva, *La Scuola SE*, Anno IV, N. 11, pp. 60-61.

Giovannini M.L., 1986, I vantaggi dei quesiti oggettivi, *La Scuola SE*, Anno V, N. 13, pp. 60-62.

Hadji C., 1992, *L'évaluation des actions éducatives*, P.U.F., Paris.

Hudson B., 1987, *Introduzione alle tecniche di valutazione*, Zanichelli, Bologna.

Hunter C. St. J., Harman D., 1979, *Adult Illiteracy in the United States: A Report to the Ford Foundation*, McGraw-Hill, New York. Tr. it., 1982, *Analfabetismo degli adulti nel Stati Uniti. Rapporto alla Fondazione Ford*, Loescher, Torino.

Huteau M., Lautrey J., 1997, *Les tests d'intelligence*, Éditions La Découverte & Syros, Paris. Tr. it., 2000, *I test di intelligenza*, il Mulino, Bologna.

ISTAT, 1995, *Popolazione e abitazioni. 13° censimento generale della popolazione e delle abitazioni, 20 ottobre 1991*, ISTAT, Roma.

ISTAT, 2000, *Statistiche dell'istruzione universitaria. Anno accademico 1997-98*, Annuario N. 4, (a cura di A. Micale e P. Ungano), ISTAT, Roma.

ISTAT, 2002, *Annuario Statistico Italiano*, ISTAT, Roma.

Kaplan M.K., Saccuzzo D.P., 1997, *Psychological testing. Principles, Applications, and Issues*, Brooks/Cole – ITP, Washington.

Kempa R., 1987, *La valutazione nell'insegnamento scientifico*, Zanichelli, Bologna.

Landenna G., Marasini D., 1990, *Metodi statistici non parametrici*, il Mulino, Bologna.

Lelli C., 2002, Analfabetismo di ritorno o analfabetismo e basta?, dal sito «La casa della cultura», febbraio (F. Garlaschelli), www.paviaquarto.it/onair/datanalf.htm

Linn R.L., 1993, *Educational Measurement*, third edition, American Council on Education and Oryx Press, Phoenix, AZ.

Maltese C., 2004, E l'Italia ritorna indietro, *Il Venerdí di Repubblica*, N. 828, 30/01/2004, p. 11.

Maddala G.S., 2001, *Introduction to Econometrics*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York.

Mascarello M., Scarafiotti A.R., 1992, *Alla ricerca delle valenze interdisciplinari della matematica attraverso i test di ingresso, dall'Università all'impresa,* L'Educazione Matematica, XIII, serie III, Vol. 3, N. 3, pp. 181-192.

Nunnally J.C., Bernstein I.H., 1994, *Psychometric Theory*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York.

Norusis M. J., 1997, *SPSS Professional Statistics 7.5*, SPSS, Chicago.

Pedrabissi L., Santinello M., 1997, *I test psicologici*, il Mulino, Bologna.

Prodi G., 1989, *Insegnamento secondario e insegnamento universitario della matematica*, Archimede, Vol. 4, pp. 163-174.

Resnick L.B., Ford W.W., 1991, *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.

Santelli Beccegato L., Varisco B. M., 2000, *Docimologia. Per una cultura della valutazione*, Guerini e Associati, Milano.

Schoenfeld A.H., 2000, Purposes and Methods of Research in Mathematics Education, *Notices of The American Mathematical Society*, 47, 6, pp. 641-649. Tr. it., 2000, Obiettivi e metodi di ricerca in didattica della matematica, *Bollettino UMI*, Serie VIII, Vol. III-A, pp. 175-199.

Siegel S., Castellan N.J. jr., 1988, *Nonparametric Statistics for the Behavioral Science*, McGraw-Hill, New York.

Silver E., 1989, *Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning*, Pitt Magazine.

Simons F., 1988, Teaching First-year Students, in A.G. Howson *et alii* (eds.), *Mathematics as a Service Subject*, Cambridge University Press, Cambridge.

Skemp R.R., 1986, *The Psychology of Learning Mathematics, Harmondsworth*, Penguin Books.

SPSS, 1997a, SPSS® *Base 7.5 for Windows® User's Guide*, SPSS, Chicago.

SPSS, 1997b, SPSS® *Base 7.5 for Windows® Application's Guide*, SPSS, Chicago.

SPSS, 1997c, *SPSS Advanced Statistics™ 7.5*, SPSS, Ch icago.

Stevens J.P., 2002, *Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences*, 4th edition, LEA: Lawrence Erlbaum Associates, London.

Ubiglia A., 2001, Gli analfabeti del 21° secolo – Un fenomeno di altri tempi ritornato clamorosamente alla ribalta proprio nell'era del computer, *La Nazione – Cronaca di Pisa*, 24 ottobre 2001.

Vertecchi B., 1993, *Decisione didattica e valutazione*, La Nuova Italia, Firenze.

Vertecchi B., 1998, *Manuale della valutazione*, Editori Riuniti, Roma.

Vertecchi B., 2002, Analfabeti si diventa, *Il Sole 24 ore – Scuola*, IV, 19 2002, p. 7.

APPENDICE A. Il questionario

Il questionario somministrato agli studenti frequentanti i corsi di laurea delle facoltà di Ingegneria e Economia è composto di due parti. La prima parte rileva le caratteristiche personali (anagrafiche e universitarie), mentre la seconda parte contiene dodici domande a scelta multipla su alcuni argomenti di matematica (cfr. paragrafo 2). Di séguito sono riportate sia la tipologia degli esercizi proposti, sia la prima pagine del questionario distinta per le due facoltà.

A.1. La tipologia di domande del test

LOGARITMI

(1) Sia $a > 0$; allora $\log_a a^4 =$

(1) $4 \ln a$	(2) a^4	(3) 4	(4) 4°

(2) Sia $a > 0$; allora $\log_a a^5 =$

(1) 5	(2) $5 \ln a$	(3) 4°	(4) a^5

Il quesito n° 1 è stato inserito in Q1 e in Q3 rispettivamente come domanda n° 3 e domanda n° 5. Il quesito n° 2 è stato inserito in Q2 come domanda n° 3.

POTENZE

(1) $\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x} =$

(1) $\lvert x \rvert$	(2) $\sqrt{x}$	(3) $\sqrt[9]{x}$	(4) x

(2) $\sqrt[5]{x^2} \times \sqrt[5]{x^3} =$

(1) x	(2) $\lvert x \rvert$	(3) $x\sqrt[5]{x}$	(4) $\sqrt[5]{x^6}$

Il quesito n° 1 è stato inserito in Q2 come domanda n° 6, mentre il quesito n° 2 è presente in Q1 e in Q3 rispettivamente come domanda n° 5 e n° 12.

DISEQUAZIONI

(1) La disequazione $\frac{x-1}{x+3} > 0$ è soddisfatta se e solo se

(1) $x < -3$ oppure $x > 1$	(2) $x - 1 > 0$ e $x + 3 > 0$	(3) $-3 < x < 1$	(4) $x > 1$

(2) La disequazione $\frac{x+2}{x-1} > 0$ è soddisfatta se e solo se

(1) $x - 1 > 0$ e $x + 2 > 0$	(2) $x > 1$	(3) $-2 < x < 1$	(4) $x < -2$ oppure $x > 1$

Il primo quesito è stato inserito in Q2 come domanda n° 12, mentre il secondo è stato inserito in Q1 e in Q3 come domanda n° 7 e n° 3.

MONOTONIA

(1) La funzione $g : R \rightarrow R$ definita da $g(x) = e^{x^2} + 1$

(1) è sempre crescente	(2) esiste un punto $\bar{x}$ in cui $g(\bar{x}) = 1$	(3) è limitata	(4) è crescente per $x > 0$

(2) La funzione $g : R \rightarrow R$ definita da $g(x) = \ln (x^2 + 1)$

(1) è crescente per $x > 0$	(2) è limitata	(3) esiste un punto $\bar{x}$ in cui $g(\bar{x}) = -1$	(4) è sempre crescente

Il primo quesito è presente in Q2 come domanda n° 1. Il secondo si trova in Q1 e in Q3 rispettivamente alle domande n° 4 e n° 2.

FUNZIONI DI UNA VARIABILE (a)

(1) Se si sceglie un $\bar{x}$ abbastanza grande, per ogni $x > \bar{x}$ risulta

(1) $\ln x^{70} < \frac{x}{70} < \frac{e^x}{70 * 10^4}$	(2) $\ln x^{70} < \frac{e^x}{70 * 10^4} < \frac{x}{70}$	(3) $x < \ln x^{70} < \frac{e^x}{70 * 10^4}$	(4) $\frac{e^x}{70 * 10^4} < \ln x^{70} < x$

(2) Se si sceglie un $\bar{x}$ abbastanza grande, per ogni $x > \bar{x}$ risulta

(1) $\frac{x}{100} < \ln x^{100} < \frac{e^x}{100^{100}}$	(2) $\frac{e^x}{100^{100}} < \ln x^{100} < \frac{x}{100}$	(3) $\ln x^{100} < \frac{x}{100} < \frac{e^x}{100^{100}}$	(4) $\ln x^{100} < \frac{e^x}{100^{100}} < \frac{x}{100}$

Il primo quesito è inserito in Q1 e in Q3 come domanda n° 8, il secondo in Q2 sempre come domanda n° 8.

FUNZIONI DI UNA VARIABILE (b)

(1) La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 3$

(1) ha segno costante in $\Re$	(2) può non annullarsi mai in [1,3]	(3) si annulla almeno una volta in [1,3]	(4) è periodica

(2) La funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

(1) ha segno costante in $\Re$	(2) si annulla almeno una volta in [2,5]	(3) può non annullarsi mai in [2,5]	(4) è periodica

Il primo quesito è stato inserito in Q1 e in Q3 alle domande n° 10 e n° 11, il secondo si trova in Q2 come domanda n° 10.

SERIE

(1) La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$

(1) ha una somma che dipende da *n*	(2) converge a 2	(3) nessuna delle altre risposte è corretta	(4) ha come somma $+\infty$

(2) La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$

(1) ha come somma $+\infty$	(2) converge a 3/2	(3) nessuna delle altre risposte è corretta	(4) ha una somma che dipende da *n*

Il quesito n° 1 è stato scelto per Q2 in corrispondenza della domanda n° 7. Il quesito n° 2 è stato inserito in Q1 e in Q3 rispettivamente alle domande n° 12 e n° 9.

INTEGRALI (a)

(1) Data la funzione $f(x) = e^{\sin^2(x)} + 1$ e il punto P di coordinate (1, -1), quale delle seguenti affermazioni è vera?

(1) esiste una primitiva di f che passa per P	(2) non esiste alcuna primitiva di f che passa per P	(3) non esistono primitive di f perché $f(x)>0$	(4) tutte le primitive $G(x)$ di $f(x)$ sono positive

2) Data la funzione $f(x) = \ln(\sin^2 x + 1)$ e il punto P di coordinate (1, -1), quale delle seguenti affermazioni è vera?

(1) esiste una primitiva di f che passa per P	(2) non esistono primitive di f perché $f(x) > 0$	(3) non esiste alcuna primitiva di f che passa per P	(4) tutte le primitive $G(x)$ di $f(x)$ sono positive

Il primo quesito è stato inserito come domanda n° 1 in Q1 e come domanda n° 10 in Q3. Il secondo costituisce la domanda n° 2 del questionario 2.

INTEGRALI (b)

(1) $\int_{-1}^{+1} 5x^5 dx =$

(1) ¾	(2) 1	(3) 0	(4) 6

(2) $\int_{-1}^{+1} 3x^3 dx =$

(1) 1	(2) ¾	(3) 6	(4) 0

Il quesito n° 1 rappresenta la domanda n° 9 di Q1 e la domanda n° 7 di Q3, mentre il quesito 2 rappresenta la domanda n° 11 di Q2.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI (a)

(1) Se $g(x,y)=\frac{x^2}{y}+e^x-\ln(y)$, allora

(1) $g''_{xy}=-\frac{2x}{y^2}$	(2) $g''_{xy}=-\frac{2x}{y^2}+e^x$	(3) $g''_y=x^2\ln(y)-\frac{1}{y}$	(4) $g''_{xx}=e^x$

(2) Se $g(x,y)=\frac{y^2}{x}-e^y+\ln(x)$, allora

(1) $g''_{xy}=-\frac{2y}{x^2}+e^y$	(2) $g''_{xx}=\frac{1}{x^3}$	(3) $g''_{xy}=-\frac{2y}{x^2}$	(4) $g''_y=-e^y$

Il primo quesito, inserito in Q1 e in Q3, costituisce per entrambi la domanda n° 6; il secondo, inserito in Q2, la domanda n° 9.

FUNZIONI DI DUE VARIABILI (b)

(1) La funzione $\phi:\Re\times\Re\ \rightarrow$ definita da $\phi(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2$

(1) ha massimo ma non ha minimo	(2) ha minimo e massimo	(3) non ha né minimo né massimo	(4) ha minimo ma non ha massimo

(2) La funzione $\phi:\Re\times\Re\ \rightarrow$ definita da $\phi(x,y)=(x+1)^2+(y+2)^2$

(1) ha minimo e massimo	(2) ha minimo ma non ha massimo	(3) ha massimo ma non ha minimo	(4) non ha né minimo né massimo

Il quesito 1 fa parte di Q1 e di Q3 come domanda n° 2 e domanda n° 4, il quesito 2 fa parte di Q2 come domanda n° 5.

SISTEMI LINEARI

1) Il sistema $\begin{Bmatrix} x_1-2x_2+4x_3=1 \\ x_1-2x_2-x_3=2 \end{Bmatrix}$

(1) ha solo due soluzioni	(2) ha una ed una sola soluzione	(3) ha infinite soluzioni	(4) è impossibile

(2) Il sistema $\begin{Bmatrix} 2x_1-x_2+3x_3=5 \\ 2x_1-x_2-2x_3=-1 \end{Bmatrix}$

(1) è impossibile	(2) ha una ed una sola soluzione	(3) ha solo due soluzioni	(4) ha infinite soluzioni

Il quesito 1 rappresenta le domande n° 11 e n° 1 rispettivamente di Q1 e di Q3. Il quesito 2 è la domanda n° 4 di Q2.

A.2. Prima pagina del questionario per la Facoltà di Ingegneria

Parte riservata (da non compilare, grazie!) — **N. QUESTIONARIO** | | | | |

INDAGINE SULLE CONOSCENZE DI MATEMATICA
DEGLI STUDENTI DELLA FACOLTÀ DI INGEGNERIA

L'obiettivo dell'indagine è *valutare le conoscenze di matematica* a distanza di un certo numero di anni dall'ultimo esame di matematica sostenuto all'Università.

Sesso ….. ….. ….. ….. ….. ….. ① Maschio ② Femmina

Anno di nascita … … … … … … … … … … … … | 1 | 9 | | |

Scuola secondaria frequentata

① Liceo Classico	② Liceo Scientifico	③ Altri licei	④ Ist. Tecn. Comm.le
⑤ Ist. Magistrale	⑥ Ist. per Geometri	⑦ Ist. Tecn. Industriale	⑧ Altro …….

Voto dell'esame di maturità … … … … … … … … … … | | |

Corso di laurea

① Ingegneria Ambientale	② Ingegneria dei Materiali	③ Ingegneria Meccanica
④ Ingegneria Elettronica	⑤ Ingegneria Informatica	⑥ Ingegneria delle Telecomunicazioni

Anno di iscrizione

① I	② II	③ III	④ IV	⑤ V	⑥ I F.C.	⑦ II F.C.	⑧ III e oltre F.C.

Lavora?

① No	② Saltuariamente	③ A metà tempo, ma continuativamente	④ A tempo pieno

Numero *complessivo* di esami superati dall'immatricolazione? | | |

Voto CONSEGUITO all'ESAME di **ANALISI MATEMATICA 1 (oppure A)** | | |

Voto CONSEGUITO all'ESAME di **ANALISI MATEMATICA 2 (oppure B)** | | |

Voto CONSEGUITO all'ESAME di **METODI MATEMATICI** (se è stato sostenuto) | | |

Anni : *Mesi*

Tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica | | : | | |

VOTO MEDIO RELATIVO AGLI ESAMI SINORA SOSTENUTI | | | , | |

OSSERVAZIONI SUL TEST (da compilare dopo averlo eseguito)

_____

Motivo per cui mancano le risposte a qualche quesito
① Mancanza di tempo ② Argomento non conosciuto ③ Altro

A.3. Prima pagina del questionario per la Facoltà di Economia

Parte riservata (da non compilare, grazie!) — **N. QUESTIONARIO**				

INDAGINE SULLE CONOSCENZE DI MATEMATICA
DEGLI STUDENTI DELLA FACOLTÀ DI ECONOMA

L'obiettivo del questionario è *valutare le conoscenze di matematica* a distanza di un certo numero di anni dall'ultimo esame di matematica sostenuto all'Università.

Sesso ….. ….. ….. ….. ….. ….. ① Maschio ② Femmina

Anno di nascita … … … … … … … … … … … … | 1 | 9 | | |

Scuola secondaria frequentata

① Liceo Classico	② Liceo Scientifico	③ Altri licei	④ Ist. Tecn. Comm.le
⑤ Ist. Magistrale	⑥ Ist. per Geometri	⑦ Ist. Tecn. Industriale	⑧ Altro …….

Voto dell'esame di maturità … … … … … … … … … … | | |

Corso di laurea

① Economia Aziendale	② Economia e Commercio	③ Economia Politica

Anno di iscrizione

① I	② II	③ III	④ IV	⑤ I F.C.	⑥ II F.C.	⑦ III F.C.	⑧ IV e oltre F.C.

Lavora?

① No	② Saltuariamente	③ A metà tempo, ma continuativamente	④ A tempo pieno

Numero *complessivo* di esami superati dall'immatricolazione? | | |

Voto CONSEGUITO all'ESAME di **MATEMATICA GENERALE** | | |

Voto CONSEGUITO all'ESAME di **MATEMATICA FINANZIARIA 1** | | |

Tempo trascorso dall'ultimo esame di matematica *Anni* | | : *Mesi* | | |

VOTO MEDIO RELATIVO AGLI ESAMI SINORA SOSTENUTI | | | , | |

OSSERVAZIONI SUL TEST (da compilare dopo averlo eseguito)

_____

_____

Motivo per cui mancano le risposte a qualche quesito

① Mancanza di tempo	② Argomento non conosciuto	③ Altro