

УДК 539.3

© 2006

К. В. Аврамов, Ф. Пелликано

Динамическая неустойчивость цилиндрической оболочки с диском на конце

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Parametric oscillations of a cylindrical shell with big disk at the end are considered. The Sanders-Koiter shell theory is used to model oscillations of the geometrically nonlinear shell. The multiple scales method is used to study the system of differential equations describing the oscillations.

Тонкостенные конструкции оболочечного типа широко используются в аэрокосмической технике, строительстве и машиностроении. Много усилий было предпринято для исследования динамики таких конструкций. Динамическая неустойчивость оболочек исследовалась В. В. Болотным [1], А. С. Вольмиром [2], В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук [3, 4]. В данной работе представлены результаты теоретического и экспериментального анализа колебаний цилиндрической оболочки с диском на конце под действием сейсмического возбуждения.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку (рис. 1), находящуюся под действием сейсмического возбуждения. С одной стороны оболочка закреплена, а с другой к ней прикреплен диск. Эта система описывает колебания ракетносителя и нефтяного бака, находящегося в условиях землетрясения.

Сложное движение диска состоит из трех поступательных движений вдоль осей ξ , ς , η (см. рис. 1) и двух вращательных движений вокруг осей ς и ξ . Так как диск жестко прикреплен к оболочке, то в ней возникают как продольные, так и изгибные колебания с умеренными амплитудами. Такие движения описываются теорией Сандерса-Коитера [5]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + zk_x; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta,0} + zk_\theta; \quad \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta,0} + zk_{x\theta}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right)^2; \quad k_{x\theta} = -2 \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1}{2R} \left(3 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right),$$

$$\varepsilon_{\theta,0} = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} - \frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{R \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2;$$

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} - \frac{v}{R} \right); \quad k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad k_\theta = \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2},$$

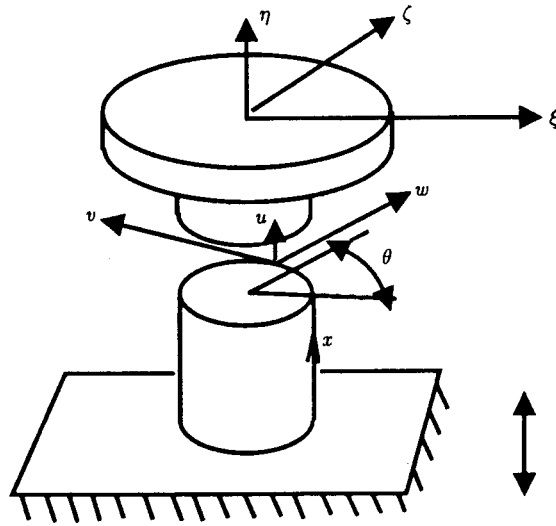


Рис. 1

где x, θ — продольная и угловая координаты оболочки; $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$ — деформации произвольной точки оболочки; $\varepsilon_{x,0}, \varepsilon_{\theta,0}, \gamma_{x\theta,0}$ — деформации срединной поверхности оболочки; $k_x, k_\theta, k_{x\theta}$ — кривизны и кручение срединной поверхности оболочки; u, v, w — продольное, окружное и радиальное перемещение точек оболочки. Потенциальную энергию представим в виде [6]:

$$U_s = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\varepsilon_{x,0}^2 + \varepsilon_{\theta,0}^2 + 2\nu \varepsilon_{x,0} \varepsilon_{\theta,0} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta,0}^2 \right) dx R d\theta +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(k_x^2 + k_\theta^2 + 2\nu k_x k_\theta + \frac{1-\nu}{2} k_{x\theta}^2 \right) dx R d\theta, \quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии оболочки T_s и кинетической энергии диска T_m :

$$T = T_s + T_m; \quad T_s = \frac{1}{2} \rho_s h \int_0^{2\pi} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx R d\theta, \quad (3)$$

$$T_m = \frac{J_\zeta}{8R^2} [\dot{u}(L, 0) - \dot{u}(L, \pi)]^2 + \frac{J_\xi}{8R^2} \left[\dot{u}\left(L, \frac{\pi}{2}\right) - \dot{u}\left(L, -\frac{\pi}{2}\right) \right]^2 +$$

$$+ \frac{m}{2} \left[\dot{w}^2(L, 0) + \dot{w}^2\left(L, \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{m}{2} [\dot{u}(L, \theta)]_{\theta,0}^2, \quad (4)$$

где ρ_s — плотность материала оболочки; $[\cdot]_{\theta,0}$ — оператор осреднения по координате θ ; m — масса диска; J_ζ, J_ξ — моменты инерции диска относительно осей ζ и ξ . Кинетическая энергия диска описывает его сложное движение при колебаниях. Для учета сейсмического возбуждения заделки $\tilde{\xi}(t)$ введем замену переменных $u(x, \theta, t) = \tilde{u}(x, \theta, t) + \tilde{\xi}(t)$ в кинетическую энергию (3).

Перемещения оболочки u , v , w при колебаниях представим в виде разложений по линейно независимым функциям пространственных координат:

$$\begin{aligned}
 w(x, \theta, t) &= \cos \theta \sum_{m=1}^M q_m(t) \varphi_m(x) + \sum_{m=1}^{N_1} q_{\bar{M}+m}(t) \chi_m(x) + \cos \theta \sum_{m=1}^{N_4} q_{\bar{N}_1+N_3+m}(t) \chi_m(x); \\
 u(x, \theta, t) &= \cos \theta \sum_{m=1}^N q_{M+m}(t) \varphi'_m(x) + \sum_{m=1}^{M_1} q_{M+N+m}(t) \sin \left[\frac{(2m-1)\pi x}{2L} \right] + \\
 &\quad + \cos \theta \sum_{m=1}^{N_2} q_{\bar{M}+N_1+m}(t) \chi'_m(x) + \tilde{\xi}(t); \\
 v(x, \theta, t) &= \sin \theta \sum_{n=1}^{N_3} q_{\bar{N}_1+n}(t) \chi_m(x); \\
 \bar{M} &= M + N + M_1; \quad \bar{M}_1 = N_1 + N_2 + N_3; \quad \bar{N}_1 = \bar{M} + N_1 + N_2; \quad N_\Sigma = \bar{N}_1 + N_3 + N_4,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., q_{N_Σ} — обобщенные координаты; N_Σ — число степеней свободы системы; $\chi_m(x)$ — собственные функции изгибных колебаний стержня, защемленного по концам; $\varphi_m(x)$ — собственные функции стержня с одной стороны защемленного, а с другой стороны — свободного. Разложения (5) были предложены в результате анализа экспериментальных данных колебаний оболочки. В разложении (5) учтены следующие факторы. Экспериментальные данные свидетельствуют, что первая частота колебаний оболочки отвечает балочной форме. Первое слагаемое в разложении $w(x, t)$ позволяет концу оболочки совершать движение как твердому телу, а второе слагаемое описывает осесимметричные движения оболочки. Первое слагаемое в разложении $u(x, t)$ удовлетворяет геометрическим граничным условиям на концах оболочки.

Уравнения (5) вводятся в кинетическую и потенциальную энергию (2)–(4). Тогда кинетическая энергия принимает вид квадратичной формы обобщенных скоростей $T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots)$, а потенциальная энергия зависит от обобщенных координат вплоть до четвертых степеней: $U_s = U_s(q_1, q_2, \dots)$. Уравнения движений оболочки составлялись в форме уравнений Лагранжа второго рода.

При экспериментальных и расчетных исследованиях выбирались следующие параметры оболочки: $h = 3 \cdot 10^{-4}$ м, $R = 4,325 \cdot 10^{-2}$ м, $L = 9,4 \cdot 10^{-2}$ м, $E = 2,65 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,4$, $\rho = 1370$ кг/м³ · $m = 0,831$ кг; $J_\zeta = J_\xi = 7,55 \cdot 10^{-4}$ кг · м².

Для адекватного выбора числа членов в разложении (5) производился анализ линейных колебаний, результаты которого сравнивались с экспериментальными данными. Экспериментально были определены следующие собственные частоты колебаний: (91,03; 228; 326; 444) Гц. Производился расчет собственных частот линейных колебаний оболочки, которые моделируются 13 степенями свободы, со следующими параметрами разложений (5): $M = 2$; $N = 2$; $M_1 = N_1 = 3$; $\bar{M} = 7$; $N_2 = N_3 = N_4 = 1$; $\bar{N}_1 = 11$. Тогда собственные частоты линейных колебаний были получены в виде: (85,42; 240; 340; 437) Гц. Проводился анализ колебаний цилиндрической оболочки, которые моделировались 9 степенями свободы: $M_1 = N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 1$; $\bar{M} = 5$; $\bar{N}_1 = 7$; $N_\Sigma = 9$; $M = N = 2$. В результате расчетов были получены следующие собственные частоты: (88,81; 285; 340; 3165) Гц. Как видно из представленных результатов, для моделей оболочек с тринадцатью и девятью степенями свободы первые три собственные частоты близки к экспериментальным данным. Поэто-

му, по результатам линейного анализа был сделан вывод, что разложения (5), содержащие 9 обобщенных координат, адекватны для дальнейшего анализа нелинейных колебаний.

Нелинейные колебания цилиндрической оболочки описываются дискретной моделью с девятью степенями свободы:

$$\sum_{j=1}^9 m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^9 D_{ij} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^9 c_{ij} q_j = \sum_{\substack{r, \mu=1 \\ \nu_r + \nu_\mu = 2}}^9 \tilde{a}_{\nu_r \nu_\mu} q_r^{\nu_r} q_\mu^{\nu_\mu} + \\ + \sum_{\substack{r, \mu, l=1 \\ \nu_r + \nu_\mu + \nu_l = 3}}^9 \tilde{F}_{\nu_r \nu_\mu \nu_l}^{(i)} q_r^{\nu_r} q_\mu^{\nu_\mu} q_l^{\nu_l} + \Gamma_i \tilde{\xi}_0 \omega^2 \cos \omega t; \quad i = \overrightarrow{1, 9}, \quad (6)$$

где $\Gamma_5 = 4\rho_s h L R + m$; $\Gamma_\mu = 0$; $\mu = 1, \dots, 4, 6, \dots, 9$; $\|m_{ij}\|_{j=1,9}^{i=1,9}$, $\|c_{ij}\|_{j=1,9}^{i=1,9}$ — матрицы масс и жесткости. Запишем систему уравнений (6) относительно нормальных координат η линейной задачи $\eta = (U)^{-1} q$, где (U) — матрица собственных форм. В этом случае система (6) принимает следующий вид:

$$\ddot{\eta}_j + \tilde{\delta}_j \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = - \sum_{\substack{r, \mu=1 \\ \nu_r + \nu_\mu = 2}}^9 a_{\nu_r \nu_\mu}^{(i)} \eta_r^{\nu_r} \eta_\mu^{\nu_\mu} + \sum_{\substack{r, \mu, l=1 \\ \nu_r + \nu_\mu + \nu_l = 3}}^9 F_{\nu_r \nu_\mu \nu_l}^{(i)} \eta_r^{\nu_r} \eta_\mu^{\nu_\mu} \eta_l^{\nu_l} - r_j \tilde{\xi}_0 \omega^2 \cos \omega t; \quad (7)$$

$j = \overrightarrow{1, 9}.$

Приведем систему (7) к безразмерной форме:

$$\ddot{x}_j + \varepsilon \delta_j \dot{x}_j + \bar{\omega}_j^2 x_j = -\varepsilon \chi_j \gamma_j \cos \bar{\omega} \tau - \varepsilon \sum_{\substack{r, \mu=1 \\ \nu_r + \nu_\mu = 2}}^9 a_{\nu_r \nu_\mu}^{(j)} x_r^{\nu_r} x_\mu^{\nu_\mu} + \varepsilon^2 \sum_{\substack{r, \mu, l=1 \\ \nu_r + \nu_\mu + \nu_l = 3}}^9 F_{\nu_r \nu_\mu \nu_l}^{(j)} x_r^{\nu_r} x_\mu^{\nu_\mu} x_l^{\nu_l}, \quad (8)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Как показывают результаты численного моделирования системы (8), в ней наблюдается основной параметрический резонанс

$$\bar{\omega} = 2 + \varepsilon \chi. \quad (9)$$

Для аналитического исследования этого резонанса предполагается, что основной вклад в колебания в области параметрического резонанса вносят только первые три нормальные координаты x_1, x_2, x_3 с наименьшими частотами. Поэтому воспользуемся оценками $x_j = O(\varepsilon)$; $j = \overrightarrow{4, 9}$. Если ввести эти оценки в систему (8), то первые три уравнения становятся независимыми от остальной системы. Эти первые три уравнения исследуются методом многих масштабов [7], который учитывает внутренний резонанс: $\bar{\omega}_2 = 3 + \varepsilon \sigma$. В результате применения этого метода получаем систему модуляционных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 + \delta_1 \frac{\rho_1}{2} + g_4 \frac{\rho_1}{2} \sin(T_1 \chi - 2\varphi_1) + \frac{g_5}{2} \rho_2 \sin[\varphi_2 - \varphi_1 + (\sigma - \chi)T_1] &= 0; \\ -\dot{\varphi}_1 \rho_1 + g_4 \frac{\rho_1}{2} \cos(\chi T_1 - 2\varphi_1) + g_5 \frac{\rho_2}{2} \cos[\varphi_2 - \varphi_1 + (\sigma - \chi)T_1] &= 0; \\ \dot{\rho}_2 + \delta_2 \frac{\rho_2}{2} + g_1 \frac{\rho_1}{2} \sin[\varphi_1 - \varphi_2 + (\chi - \sigma)T_1] + g_2 \frac{\rho_1}{2} \sin[\varphi_1 - \varphi_2 + (\chi - \sigma)] &= 0; \\ -\dot{\varphi}_2 \rho_2 + g_1 \frac{\rho_1}{2} \cos[\varphi_1 - \varphi_2 + (\chi - \sigma)T_1] + g_2 \frac{\rho_1}{2} \cos[\varphi_1 - \varphi_2 + (\chi - \sigma)T_1] &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где параметры g_1, g_2, g_4, g_5 не приводятся для краткости.

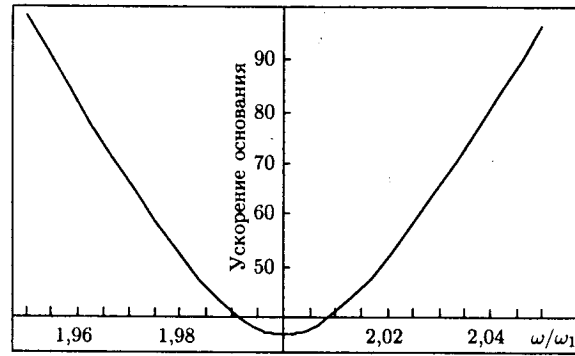


Рис. 2

Рассмотрим следующие величины коэффициентов диссипации $\delta_2 = 0$; $\delta_1 \neq 0$. Введем замену переменных

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\rho_1 \cos \left[\frac{\chi}{2} T_1 - \varphi_1 \right], \rho_1 \sin \left[\frac{\chi}{2} T_1 - \varphi_1 \right], \rho_2 \cos \left[\varphi_2 + \left(\sigma - \frac{3}{2} \chi \right) T_1 \right], \right. \\ \left. \rho_2 \sin \left[\varphi_2 + \left(\sigma - \frac{3}{2} \chi \right) T_1 \right] \right).$$

Тогда система модуляционных уравнений принимает вид:

$$\dot{x}_1 = -\frac{\delta_1}{2} x_1 - y_1 \left(\frac{\chi}{2} + \frac{g_4}{2} \right) - \frac{g_5}{2} y_2; \quad \dot{y}_1 = -\frac{\delta_1}{2} y_1 + x_1 \left(\frac{\chi}{2} - \frac{g_4}{2} \right) - \frac{g_5}{2} x_2; \\ \dot{x}_2 = -\left(\sigma - \frac{3}{2} \chi \right) y_2 + \frac{g_1 + g_2}{2} y_1; \quad \dot{y}_2 = \left(\sigma - \frac{3}{2} \chi \right) x_2 + \frac{g_1 + g_2}{2} x_1. \quad (11)$$

Анализ устойчивости тривиального решения системы (11) сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени

$$\lambda^4 + \delta_1 \lambda^3 + P_2 \lambda^2 + P_1 \delta_1 \lambda + P_0 = 0, \quad (12)$$

где коэффициенты P_0, P_1, P_2 зависят от параметров системы (11). Тогда граница области неустойчивости описывается уравнением

$$\frac{a_c^4}{4} f_5^2 f_{12}^2 - a_c^3 f_4 f_5 f_{12} \left(\frac{3}{2} \chi - \sigma \right) - a_c^2 f_4^2 \left(\frac{3}{2} \chi - \sigma \right)^2 + (\delta_1^2 + \chi^2) \left(\sigma - \frac{3}{2} \chi \right)^2 = 0, \quad (13)$$

где $a_c = \frac{\tilde{\xi}_0}{h} \bar{\omega}^2$ — амплитуда ускорения сейсмического возбуждения заделки. Параметры f_{12}, f_4, f_5 определяются из соотношений

$$f_{12} = \frac{a_{12}^{(2)} r_2}{30} + \frac{a_{13}^{(2)} r_3}{2(\bar{\omega}_3^2 - 4)}; \quad f_4 = \frac{r_2 a_{12}^{(1)}}{10} + \frac{r_3 a_{13}^{(1)}}{2(\bar{\omega}_3^2 - 4)}; \quad f_5 = \frac{a_{22}^{(1)} r_2}{5} + \frac{a_{23}^{(1)} r_3}{2(\bar{\omega}_3^2 - 4)}.$$

Область неустойчивости колебаний показана на рис. 2. Если параметры сейсмического возбуждения находятся вне области динамической неустойчивости, то оболочка может совершать колебания с малыми амплитудами. Если параметры сейсмического возбуждения

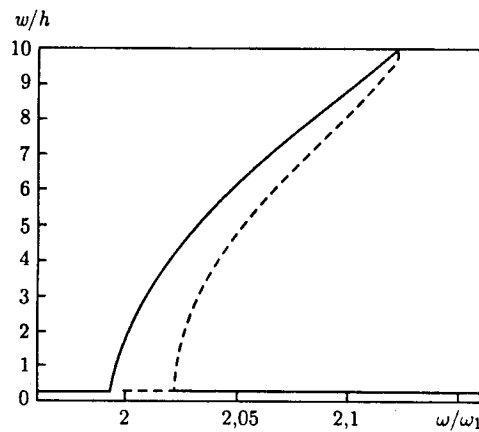


Рис. 3

находятся в области динамической неустойчивости, то в системе наблюдаются установившиеся колебания с большими амплитудами. Такие нелинейные колебания исследовались численно с помощью метода, представленного в [6]. Результаты расчета показаны на амплитудно-частотной характеристике (рис. 3). На границе области динамической неустойчивости (см. рис. 2) возникает бифуркация удвоения периода. В результате этой бифуркации появляются значительные колебания удвоенного периода, которые представлены на рис. 3. Как видно из этого рисунка, колебания удвоенного периода наблюдаются вне области динамической неустойчивости и сосуществуют с колебаниями, имеющими малые амплитуды.

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 500 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1987. – 432 с.
3. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1984. – 220 с.
4. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Выща шк., 1989. – 207 с.
5. Leissa A. W. Vibration of Shells, NASA SP – 288. – Washington, DC: Government Printing Office, 1993. – 345 p.
6. Atabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach // J. Sound and Vibration. – 2003. – **264**. – P. 1091–1125.
7. Найфэ А. Х. Методы возмущений. – Москва: Мир, 1976. – 456 с.

НТУ “Харьковский политехнический институт”
Моденский университет, Италия

Поступило в редакцию 25.08.2005